

OPTIMIERUNGSVERFAHREN -
SOFTWARE UND PRAKTISCHE
ANWENDUNGEN

LEHRGANG R1.06



REIHE R
DYNAMISCHE SYSTEME

14.9. - 18.9.1981
OBERPFAFFENHOFEN

Vorwort:

Beim vorliegenden Manuskript handelt es sich um eine speziell für den Lehrgang R1.06 der Carl-Cranz-Gesellschaft e.V. geschriebene Arbeit, in der effiziente und zuverlässige numerische Methoden zur Lösung von Aufgaben der Optimalen Steuerung mit Beschränkungen beschrieben und an Problemen der Praxis dargestellt werden.

Um weiteren Fortschritten Rechnung zu tragen, die seit der ersten Fassung des Manuskriptes - teilweise auch schon vorher - erzielt wurden, wurde den ursprünglich sechs Abschnitten ein ergänzender siebter angefügt.

In diesem 7. Abschnitt wird gezeigt, wie sich mit den vorher beschriebenen Methoden auch das für die Praxis wichtige minimax- oder Chebychef- Steuerungsproblem lösen läßt. Außerdem werden neue Resultate zu den in Abschnitt 6 dargestellten Problemen des Wiedereintritts einer Space-Shuttle und eines Apollo-Orbiters angegeben.

Anmerkung:

Für die Unterstützung bei den numerischen Berechnungen bin ich meinen Mitarbeitern Herrn Dipl.-Math. E. Koller, sowie den Herren Dipl.-Math. P. Krämer-Eis und Dipl.-Math. J. Schlöder zu Dank verpflichtet.

<u>Inhalt</u>	<u>Seite</u>
1. Einleitung	1
2. Charakterisierung der optimalen Steuerung durch notwendige Bedingungen	2
2.1 Notwendige Bedingungen für Randbögen	3
2.2 Notwendige Bedingungen für Berührungspunkte	6
3. Formulierung eines Mehrpunktrandwertproblems mit Schalt- und Sprungbedingungen	7
3.1 Allgemeine Form	7
3.2 MPRWP für Randbögen	8
3.3 MPRWP für Berührungspunkte	11
4. Numerische Behandlung von Mehrpunktrandwertproblemen mit Schalt- und Sprungbedingungen	12
4.1 Die Mehrzielmethode für MPRWP	12
4.2 Schaltfunktionen und Konvergenzbereich	13
5. Homotopieverfahren	16
5.1 Das Fortsetzungsprinzip	16
5.2 Singuläre Punkte	18
5.3 Hinweise zur praktischen Durchführung von Homotopien . . .	19
5.3.1 Variable Stützstellen	19
5.3.2 Randwerthomotopien	20
5.3.3 Wahl der Homotopieschrittweite	21
6. Beispiele	23
6.1 Reichweitenoptimierung der zweiten Stufe einer Space- Shuttle bei einer Aufheizungsbeschränkung	23
6.2 Zeitoptimale Steuerung eines Erzentladers bei Begrenzung der Höchstgeschwindigkeit	35
6.3 Aufheizungsminimierung bei der Rückführung einer Apollo- Kapsel bei einer Wiederaufstiegshöhenbegrenzung	46
7. Erweiterungen	52
7.1 Das Chebychef-Steuerungsproblem der "schärfsten Beschränkung"	52
7.2 Die aufheizungsminimale Lösung des Space-Shuttle-Wieder- eintritts	57
7.3 Zur Wiederaufstiegshöhenbegrenzung beim Apollo-Problem . .	59
Literatur	62

1. Einleitung

Die Grundaufgabe der optimalen Steuerung, eine stückweise stetige Steuerung $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^K$ und eine zugehörige Trajektorie $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu finden, so daß

- (1) $\Phi(T, x(T)) = \min$
- (2) $x(0) = x_0, \dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$
- (3) $r(T, x(T)) = 0$
- (4) $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^K$

wird in vielen, praktisch relevanten Problemstellungen ergänzt durch eine oder mehrere Zusatzforderungen des Typs

(5) $g(x(t)) \leq \epsilon$ oder $g(x(t), u(t)) \leq \epsilon$

Mit solchen Zustandsbeschränkungen lassen sich z.B. Höchstbelastungen, Mindestanforderungen, Vorzeichenbedingungen, Sicherheitstoleranzen berücksichtigen, aber auch gewünschte Eigenschaften der optimalen Lösung, die im Zielfunktional (1) nicht berücksichtigt sind.

Im allgemeinen ist auch nach der Empfindlichkeit der Lösung gegenüber der Schärfe der Bedingung (5) gefragt, d.h. nach der Abhängigkeit der Lösung des Problems von Änderungen des Parameters ϵ .

Man beachte, daß eine Lösung $\bar{u}(t), \bar{x}(t)$ des unbeschränkten ("freien") Problems (1,2,3,4) stetig auch die Bedingung (5) erfüllt mit

(6) $\epsilon = \epsilon^{frei} := \max_{t \in [0, T]} g(\bar{x}(t) [\bar{u}(t)])$

Bemerkung: Wir werden im folgenden zur Vereinfachung meistens annehmen, daß $\epsilon = 0$ in (5). Da (5) äquivalent ist zum Problem $g(x(t)) - \epsilon \leq 0$, stellt dies keinerlei Einschränkung dar.

Zur Behandlung zustandsbeschränkter Probleme gibt es mehrere Ansätze. Nach Berkovits [1] läßt sich (5) durch Einführung von Schlupfvariablen eliminieren, allerdings treten dann zusätzliche Differentialgleichungen und neue, singuläre Steuerungen auf.

Auch die Berücksichtigung der integralen Form von (5)

(7) $0 = \int_0^T \max^p(0, g(x(t))) dt$

ist möglich, wenn die mögliche Unbeschränktheit der (p+1)ten Ableitung des Integranden bei der Integration von (7) durch Verfahren hoher Ordnung berücksichtigt wird. Ein zu großes p verringert andererseits die Genauigkeit. Koppelt man wie Kelley [15] (7) als Strafterm an das Zielfunktional an, zeigen die adjungierten Variablen im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ häufig impulsartiges Verhalten, das ihre numerische Berechnung erschwert.

Im folgenden werden Methoden der numerischen Berechnung zustandsbeschränkter optimaler Steuerungen mit der Mehrzielmethode ([6], [7], [4]) dargestellt.

¹ Hier in der Mayerschen Form. Man beachte, daß auch nichtautonome Probleme und integrale Zielfunktionale auf diese Form gebracht werden können.

Diese Methoden wurden ausgehend von Arbeiten und Ideen von Bulirsch in einer Reihe von Arbeiten zu einem sehr präzisen und zuverlässigen Instrumentarium entwickelt und an konkreten Anwendungsproblemen ausgetestet.

Das Prinzip dieses Ansatzes besteht darin, die optimale Steuerung durch notwendige Optimalitätsbedingungen zu charakterisieren und ein zu diesen äquivalentes Mehrpunkttrandwertproblem mit Schalt- und Sprungbedingungen aufzustellen, welches dann mit einem geeigneten Mehrzielverfahren gelöst wird.

Die nötigen Startwerte für diese numerisch sehr anspruchsvollen Randwertprobleme erhält man i.a. durch eine Homotopie im Parameter ϵ . Dies hat auch den Vorteil, daß die Frage nach der Sensitivität der Lösung gleich mitbeantwortet wird.

2. Charakterisierung der optimalen Steuerung durch notwendige Bedingungen

Wir nehmen zunächst an, daß eine optimale Lösung $u(t)$, $x(t)$ des Problems (1) - (5) existiert, und daß sie entweder genau einen Randbogen (Fig. 1) besitzt, oder genau einen Berührungspunkt (Fig. 2)

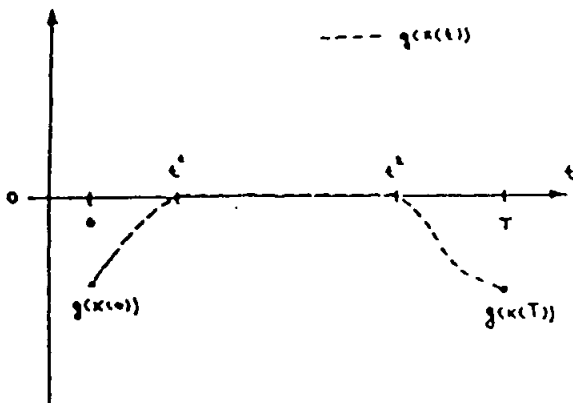


Fig. 1 Ein Randbogen $[t^1, t^2]$

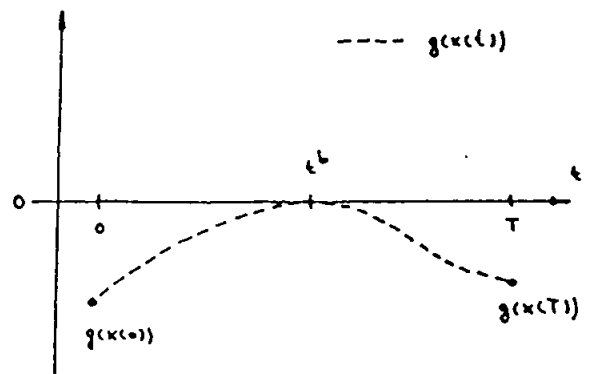


Fig. 2 Ein Berührungspunkt t^b

Wir werden uns im folgenden ausschließlich auf die Analyse dieser beiden Fälle beschränken.

Das Prinzip der Optimalität von Teilbögen gestattet uns, damit auch komplexere Lösungsstrukturen, die aus Teilabschnitten dieses Typs zusammengestellt sind, zu beschreiben.

Aus diesem Prinzip folgt auch sofort, daß die Lösung auf den freien Bögen $[0, t^1[$, $]t^2, T]$ bzw. $[0, t^b[$, $]t^b, T]$ den gleichen Bedingungen wie im unbeschränkten Fall genügt.

Es gilt deshalb dort das Maximumprinzip

$$(8) \quad H(x(t), \lambda(t), u(t)) = \max_{v \in U} H(x(t), \lambda(t), v)$$

mit der Hamiltonfunktion H und den adjungierten Variablen λ)¹

$$(9) \quad H(x, \lambda, u) := \lambda' f(x, u) ; \quad \dot{\lambda}' = - H_x(x, \lambda, u) = - \lambda' f_x(x, u)$$

welches uns i.a. eine Darstellung der optimalen Steuerung als

$$(10) \quad u(t) = u^{\text{frei}}(x(t), \lambda(t)) := \arg \max_{v \in U} H(x(t), \lambda(t), v)$$

auf den freien Bögen liefert.

Fragen: Was läßt sich über die optimale Steuerung auf dem Randbogen $[t^1, t^2]$ aussagen?

Welche Anschlußbedingungen gelten an den Nahtstellen?

Wie lassen sich Aufsprangpunkt t^1 , Absprungpunkt t^2 , Berührungspunkt t^b bestimmen?

Wir untersuchen zunächst den Fall des Randbogens, dann den (selteneren) Fall des Berührungspunktes.

2.1 Notwendige Bedingungen für Randbögen

Auf dem Randbogen gilt zunächst

$$(11) \quad g(x(t)) \equiv 0 \quad \text{bzw.} \quad g(x(t), u(t)) \equiv 0 \quad \text{für alle } t \in [t^1, t^2]$$

Enthält g eine Steuerung explizit (11b) und ist $g_u(x(t), u(t)) \neq 0$ auf $[t^1, t^2]$, dann können wir (11b) nach u auflösen¹ und erhalten damit die optimale Steuerung auf dem Randbogen in der feedback-Darstellung

$$(12) \quad u(t) = u^{\text{rand}}(x(t))$$

Im Falle (11a) müssen mit $g(x(t))$ auch dessen sämtliche totalen Ableitungen nach der Zeit verschwinden. Wir differenzieren $g(x(t))$ solange, bis die q -te Ableitung erstmals eine Steuerung u explizit enthält und erhalten:

$$(13) \quad g^{(i)}(x(t)) \equiv 0 \quad (i=0, \dots, q-1) \quad \text{für alle } t \in [t^1, t^2]$$

$$(14) \quad g^{(q)}(x(t), u(t)) \equiv 0$$

wobei $g^{(0)}(x(t)) := g(x(t))$; $g^{(i)}(x(t), u(t)) := \frac{d}{dt} g^{(i-1)}(x(t)) = g_x^{(i-1)}(x(t)) \cdot f(x(t), u(t))$

Der Index q heißt Ordnung der Zustandsbeschränkung, im Falle (11b) ist $q = 0$. In [2] wird gezeigt, daß (bei linearen Steuerungsproblemen) die Steuerbarkeit des Systems eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines solchen $q \leq n$ ist.

Gilt nun $g_u^{(q)}(x(t), u(t)) \neq 0$ auf $[t^1, t^2]$ für die optimale Lösung, so können wir Gleichung (14) wie oben nach u auflösen und erhalten wie in (12) einen Ausdruck

$$(15) \quad u(t) = u^{\text{rand}}(x(t))$$

Damit haben wir das folgende Resultat

Lemma 1: Für eine Zustandsbeschränkung der Ordnung q sind äquivalent:

$$(16) \quad g(x(t)) \equiv 0 \quad \text{auf } [t^1, t^2]$$

$$(17) \quad g^{(0)}(x(t^1)) = g^{(1)}(x(t^1)) = \dots = g^{(q-1)}(x(t^1)) = 0$$

$$\text{bzw. } g^{(q)}(x(t), u(t)) \equiv 0 \quad \text{bzw. } u(t) = u^{\text{rand}}(x(t)) \quad \text{auf } [t^1, t^2] \quad \blacksquare$$

Die Bedingungen (17a) stellen bereits einen Teil der gesuchten Anschlußbedingungen dar, (17b) liefert uns die optimale Steuerung.

Die bei einer Variation der Steuerungen zusätzlich auftretenden inneren Punktbedingungen (17a) (für $q \geq 1$) lassen für das Maximumprinzip zusätzliche Transversalitätsbedingungen in Form von Sprüngen der adjungierten Variablen erwarten, die Steuerungsbeschränkung (17b) dagegen eine Modifikation der Hamiltonfunktion und damit der adjungierten Gleichungen.

Genauer läßt sich der folgende Satz zeigen:

Satz 1: Bildet man mit adjungierten Variablen $\lambda: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mu: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ die erweiterte Hamiltonfunktion

¹ gegebenenfalls mit einem Newtonverfahren

$$(18) \quad H(x, \lambda, \mu, u) = \lambda' f(x, u) - \mu^{(q)}(x, u)$$

und mit den adjungierten Variablen $\alpha \in \mathbb{R}^6, v^0, \dots, v^{q-1}$ das erweiterte Zielfunktional

$$(19) \quad \Psi = \Phi(T, x(T)) + \alpha' \Gamma(T, x(T)) + \sum_{i=0}^{q-1} v^i g^{(i)}(x(t^i))$$

dann lauten die notwendigen Bedingungen: es existieren $\lambda, \mu, \alpha, v^i$, so daß

$$(20) \quad H(x(t), \lambda(t), \mu(t), u(t)) = \max_{v \in U} H(x(t), \lambda(t), \mu(t), v) \quad \text{"Maximumprinzip"}$$

$$(21) \quad \dot{\lambda}' = -H_x = -\lambda' f_x(x, u) + \mu^{(q)}_x(x, u)$$

$$(22) \quad \begin{cases} \lambda(T) = -\Phi_x(T, x(T)) - \alpha' \Gamma_x(T, x(T)); \\ H(T) = \Phi_T(T, x(T)) + \alpha' \Gamma_T(T, x(T)) \end{cases}$$

$$(23) \quad \mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{auf freien Bögen ; } v^i \geq 0 \quad (i=0, \dots, q-1) \\ \geq 0 & \text{auf Randbögen} \end{cases}$$

Zusätzlich zu den Standardtransversalitätsbedingungen (22) gelten

$$(24) \quad \lambda(t^1+) - \lambda(t^1-) = \begin{cases} 0 & \text{für } q=0 \\ \sum_{i=0}^{q-1} v^i g^{(i)}_x(x(t^1)) & \text{für } q \geq 1 ; \lambda(t^2+) = \lambda(t^2-) \\ 1=0 \end{cases}$$

$$(25) \quad H(t^1+) = H(t^1-) ; H(t^2+) = H(t^2-) \quad (\text{sogar } H(t) \text{ stetig auf } [0, T]),$$

d.h. die adjungierten Variablen "springen" im Aufsprungpunkt $t^1 (q \geq 1)$ und sind stetig im Absprungpunkt t^2 , die Hamiltonfunktion ist in beiden Punkten stetig. ■

Die notwendigen Bedingungen nach Bryson, Denham und Dreyfus [5], die dieser Satz enthält, haben sich für die Formulierung numerischer Algorithmen bisher als die günstigsten erwiesen. Neuere Bedingungen, etwa die von Jacobson, Lele und Speyer [14] haben bisher noch nicht zu brauchbaren Algorithmen geführt.

Ausgehend von den Ergebnissen in [14] läßt sich aber ein expliziter Zusammenhang zwischen beiden Bedingungen zeigen, der eine wichtige Verschärfung von Satz 1 liefert:

Satz 2: [2] Der Multiplikator $\mu(t)$ ist q -mal stetig differenzierbar, und mit der Bezeichnung $\mu_1(t) := (-\frac{d}{dt})^1 \mu(t)$, $i=0, \dots, q$ gilt:

$$(26) \quad \mu_1(t) \geq 0 \quad \text{auf } [t^1, t^2] \quad (i=0, \dots, q)$$

$$(27) \quad \mu_1(t^1+) = v^{q-1-1}, \mu_1(t_2) = 0 \quad (i=0, \dots, q-2)$$

$$(28) \quad \mu_{q-1}(t^1+) \geq v^0, \mu_{q-1}(t_2) \geq 0$$

und Gleichheit gilt für $q=1$! ■

Die Bedingungen (27,28) sind bei den Algorithmen in Abschnitt 3 automatisch erfüllt, während die Vorzeichenbedingungen (26) bei der Durchführung von Homotopien (Abschnitt 4) wichtige Informationen über die Zahl der zu erwartenden Randbögen liefern.

Interpretation der notwendigen Bedingungen: Auf allen Teilbögen gelten zunächst die kanonischen Differentialgleichungen

$$(29) \quad \dot{x} = f(x, u)$$

$$\dot{\lambda}' = -\lambda' f_x(x, u) + \mu^{(q)}_x(x, u)$$

In denen zunächst $u(t)$ und $\mu(t)$ noch unbestimmt sind. Auf freien Bögen werden uns $u(t)$ und $\mu(t)$ durch die notwendigen Bedingungen (10) und (23) geliefert:

$$(30) \quad u(t) = u^{\text{frei}}(x(t), \lambda(t)) ; \mu(t) = 0$$

In (29) eingesetzt, erhalten wir damit ein geschlossenes Differentialgleichungssystem von $2n$ Variablen.

Auf Randbögen liefern uns (12,15) die optimale Steuerung

$$(31) \quad u(t) = u^{\text{rand}}(x(t))$$

und das Maximumprinzip (20) einen Ausdruck für $\mu(t)$. Ist nämlich $u^{\text{rand}}(x(t)) \in \text{int}(U)$ - i.a. der Fall - gilt $H_u = 0$ und damit

$$(32) \quad \mu(t) = \lambda' \cdot f_u(x, u) / g_u^{(q)}(x, u)$$

Mit beiden Ausdrücken lassen sich u, μ aus (29) eliminieren.

Während (formal) die Parameter v^0, \dots, v^{q-1} die in den inneren Punktbedingungen

$$(33) \quad g^{(i)}(x(t^1)) = 0 \quad (i=0, \dots, q-1)$$

verlorenen Freiheitsgrade wiederbringen, legen die Stetigkeitsbedingungen (25) den Auf- und Absprungpunkt fest. Dazu werden sie zunächst etwas vereinfacht. Es gilt mit (24,30,31,33), wenn man beachtet, daß stets $\mu g^{(q)} \equiv 0$:

$$(34) \quad 0 = H(t^1-) - H(t^1+) = \lambda(t^1-) f(x(t^1), u^{\text{frei}}(x(t^1), \lambda(t^1-))) \\ - \left\{ \lambda(t^1-) + \sum_{i=0}^{q-1} v^i g_x^{(i)}(x(t^1)) \right\} f(x(t^1), u^{\text{rand}}(x(t^1))) \\ = \lambda(t^1-) f(x(t^1), u^{\text{frei}}(x(t^1), \lambda(t^1-))) \\ - \lambda(t^1-) f(x(t^1), u^{\text{rand}}(x(t^1)))$$

und damit die Aufsprungbedingung

$$(35) \quad 0 = H(x(t^1), \lambda(t^1-), u^{\text{frei}}(t^1-)) \\ - H(x(t^1), \lambda(t^1-), u^{\text{rand}}(t^1-)),$$

d.h.: rechnet man beide Ausdrücke in (35) bei der Vorwärtsintegration von (29) mit, so stößt H^{rand} von unten gegen H^{frei} , Analog läßt sich die Stetigkeit von H in t^2 interpretieren. Weitere Vereinfachungen erfordern eine Fallunterscheidung:

Fall 1: u trete nichtlinear in H auf und H sei regulär, d.h. für jedes feste x, λ habe (20) eine eindeutige Lösung u . Dann ist die optimale Steuerung stetig, und es gilt (Maurer, Gilles- sen [16], Mc Intyre, Palowinski [19]):

$$(36) \quad u^{\text{frei}}(t^1-) = u^{\text{rand}}(t^1) \quad \text{und damit} \quad g^{(q)}(x(t^1), u^{\text{frei}}(t^1-)) = 0$$

$$(37) \quad u^{\text{rand}}(t^2) = u^{\text{frei}}(t^2) \quad \text{und damit} \quad g^{(q)}(x(t^2), u^{\text{frei}}(t^2)) = 0$$

Fall 2: u trete linear in H auf, d.h. $H = h_0(x, \lambda) + h_u(x, \lambda) \cdot u$. Dann ist i.a. $u^{\text{rand}} \in \text{int}(U)$, $u^{\text{frei}} \in \partial U$ und deshalb u unstetig in t^1 und t^2 . Damit folgt aus (35) ([2], [16])

$$(38) \quad h_u(x(t^1), \lambda(t^1-)) = 0$$

$$(39) \quad h_u(x(t^2), \lambda(t^2)) = 0$$

Die Bedingungen (36,37,38,39) sind den Auf- bzw. Absprungbedingungen (25,35) theoretisch

äquivalent. Als Absprungsbedingung kann auch

$$(40) \quad \mu(t_2) = 0$$

aus (27) anstelle der äquivalenten Bedingungen (37,39) gewählt werden.

2.2 Notwendige Bedingungen für Berührungspunkte

Der Fall, daß eine wirksame Zustandsbeschränkung (5), d.h. für $\varepsilon < \varepsilon^{\text{frei}}$ mit $\varepsilon^{\text{frei}}$ aus (6), nicht zu einem Randbogen, sondern nur zu einem Berührungspunkt führt, tritt bei Beschränkungen der Ordnung $q \leq 1$ i.a. nicht auf.

Echte Berührungspunkte ergeben sich erst für Ordnungen $q \geq 2$, wo ihr Auftreten mit dem anschaulichen Argument motiviert werden kann, daß die Erfüllung der Tangentialbedingungen (17) "unökonomisch" wird:

In einem Berührungspunkt t^b (Fig. 2) hat die Funktion $g(x(t))$ ein Maximum. Ist $q \geq 2$, so sind damit auch $g(x(t))$ und $g^{(1)}(x(t))$ als Funktion der Zeit stetig, und es gelten die notwendigen Bedingungen

$$(41) \quad g(x(t^b)) = 0 ; g^{(1)}(x(t^b)) = 0$$

Höhere Ableitungen müssen aber nicht notwendig verschwinden.

Genauer hat Maurer gezeigt [16], daß für $q = 3, 5, 7, \dots$ ausschließlich Berührungspunkte möglich sind, während für $q = 2, 4, 6, \dots$ für $\varepsilon \lesssim \varepsilon^{\text{frei}}$ (ε nahe $\varepsilon^{\text{frei}}$) Berührungspunkte auftreten, die erst für kleiner werdendes ε , bei einer Verschärfung der Zustandsbeschränkung, in Randbögen übergehen.

Das Maximumprinzip bei Berührungspunkten ist wenig verschieden vom unbeschränkten Fall. Nur die Bedingung (41a) führt zu einem Sprung der adjungierten Variablen ((41b) wird durch benachbarte Trajektorien mit (41a) zwangsläufig erfüllt!).

Es gilt der Satz (Maurer, Gillessen [16])

Satz 3: Mit der Hamiltonfunktion

$$(42) \quad H(x, \lambda, u) = \lambda' f(x, u)$$

lauten die notwendigen Bedingungen: es existieren λ, α, v^0 , so daß

$$(43) \quad H(x(t), \lambda(t), u(t)) = \max_{v \in U} H(x(t), \lambda(t), v)$$

$$(44) \quad \dot{\lambda}' = - \lambda' f_x(x, u)$$

$$(45) \quad \lambda(T) = - \Phi_x(T, x(T)) - \alpha' r_x(T, x(T))$$

$$H(T) = \Phi_T(T, x(T)) + \alpha' r_T(T, x(T))$$

und zusätzlich:

$$(46) \quad \lambda(t^{b+}) - \lambda(t^{b-}) = v^0 g_x(x(t^b)), \quad v^0 \geq 0; H(t^{b+}) = H(t^{b-}) \quad \blacksquare$$

Der Unterschied zum unbeschränkten Problem besteht also nur im Sprung der adjungierten Variablen im Berührungspunkt, wobei t^b durch die Stetigkeit der Hamiltonfunktion (46b) festgelegt wird. Insbesondere ist (46b) äquivalent zu (41b).

Der Sprungparameter v^0 entspricht (formal) dem verlorenen Freiheitsgrad durch (41a).

3. Formulierung eines Mehrpunktrandwertproblems mit Schalt- und Sprungbedingungen

Die in Abschnitt 2 aufgestellten notwendigen Bedingungen für eine optimale Lösung des zustandsbeschränkten Steuerungsproblems führen auf ein Mehrpunktrandwertproblem mit Schalt- und Sprungbedingungen (kurz MPRWP), welches mit der Mehrzielmethode gelöst werden kann.

3.1 Allgemeine Form

Eine zentrale Rolle in der Formulierung solcher Randwertprobleme spielen die Schaltfunktionen

$$(47) \quad Q_i(t, z(t)) \quad (i = 1, \dots, L) ,$$

deren Nullstellen entlang einer Trajektorie $z(t)$ ($z: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine stückweise C^1 -Funktion) Schaltpunkte genannt werden:

$$(48) \quad S[z] := \bigcup_{i=1}^L \{t \mid Q_i(t, z(t-)) = 0\}$$

Gesucht ist nun eine Trajektorie $z(t)$ mit den Schaltpunkten

$$(49) \quad S[z] = \{t^1, \dots, t^k\} , \quad a < t^1 < t^2 < \dots < t^k < b ,$$

die auf $[a, b] \setminus S[z]$ der Differentialgleichung genügt

$$(50) \quad \dot{z}(t) = F(t, z(t); \text{sign}(Q(t, z(t)))) \quad , \quad t \in [a, b] \setminus S[z]$$

Dabei wird die rechte Seite F durch die Vorzeichen der Schaltfunktionen bestimmt. Sie darf dabei in den Schaltpunkten unstetig sein, muß aber auf den dazwischenliegenden Teilintervallen - aus numerischen Gründen - hinreichend oft differenzierbar sein.

Auch $z(t)$ selbst darf in den Schaltpunkten (und nur dort!) unstetig sein:

$$(51) \quad z(t^{j+}) = z(t^{j-}) + G_j(t^j, z(t^{j-})) \quad , \quad t^j \in S[z]$$

Schließlich sollen die Bedingungen in Rand- und inneren Punkten (die auch verkoppelt sein dürfen)

$$(52) \quad R(z(a), z(t^{1-}), \dots, z(t^{k-}), z(b)) = 0 \quad , \quad t^j \in S[z]$$

erfüllt werden.

Die Intervallgrenzen a, b sind dabei - ohne Einschränkung, siehe (55) - als fest vorausgesetzt.

Wir wollen im folgenden solche MPRWP für zustandsbeschränkte Steuerungsprobleme aufstellen, und unterscheiden dabei wieder die Fälle Randbogen und Berührungspunkt. Bei komplexeren Lösungsstrukturen sind entsprechend komplexere MPRWP anzusetzen.

3.2 MPRWP für Randbögen

Die kanonischen Differentialgleichungen (29) und die Rand- und Transversalitätsbedingungen (3), (22a) liefern uns zunächst $2n$ Differentialgleichungen für die Variablen x, λ

$$(53) \quad \dot{x} = f(x, u)$$
$$\dot{\lambda}' = -\lambda' f_x(x, u) + \mu g_x^{(q)}(x, u)$$

und dazu $2n + k$ Randbedingungen

$$(54) \quad x(0) - x_0 = 0, \quad r(T, x(T)) = 0$$
$$\lambda(T) + \phi_x(T, x(T)) + \alpha' r_x(T, x(T)) = 0$$

Die überzähligen k Randbedingungen sowie k Unbekannten α lassen sich i.a. eliminieren (man löse k der Trv.-Bedingungen nach α auf). Andernfalls nehme man die α mit trivialen Differentialgleichungen ($\dot{\alpha} = 0$) zu (53) hinzu.

Probleme mit freier Endzeit T transformiert man auf die festen Intervallgrenzen $[0, 1]$, indem man T als zusätzliche Variable mit einer trivialen Differentialgleichung und der Randbedingung (22b)

$$(55) \quad \dot{T} = 0, \quad H(T) - \phi_T(T, x(T)) - \alpha' r_T(T, x(T)) = 0$$

eingeführt und zu einer normierten Zeit $\tau = t/T$ übergeht (Bulirsch [6]). Die rechten Seiten von (53) müssen dann mit der Variablen T multipliziert werden!

Bei Problemen mit fester Endzeit ist Bedingung (22b) gegenstandslos.

Unstetige rechte Seite

Die rechte Seite von (53) ändert sich unstetig, wenn wir von einem freien Bogen zu einem Randbogen übergehen und umgekehrt. Es ist

$$(56) \quad \mu(t) = 0, \quad u(t) = u^{\text{frei}}(x(t), \lambda(t)) \quad \text{auf freien Bögen}$$

$$\mu(t) = \lambda' f_{u'}(x, u) / g_{u'}^{(q)}(x, u), \quad u(t) = u^{\text{rand}}(x(t)) \quad \text{auf Randbögen}$$

Punkt- und Sprungbedingungen

Im Aufsprungpunkt t^1 sind die q Punktbedingungen

$$(57) \quad g^{(i)}(x(t^1)) = 0 \quad (i = 0, \dots, q-1)$$

zu erfüllen, die den q unbekannt Variablen v_0, \dots, v_{q-1} entsprechen, die wir zu den Differentialgleichungen hinzunehmen. Außerdem müssen in t^1 die Sprünge

$$(58) \quad \lambda(t^1+) = \lambda(t^1-) + \sum_{i=0}^{q-1} v_i g_x^{(i)}(x(t^1))$$

ausgeführt werden.

Schaltfunktionen

Wegen (56-58) müssen wir jetzt noch Schaltfunktionen definieren, deren Nullstellen Auf- und Absprungpunkt, und deren Vorzeichen über (56) die rechte Seite festlegen (zusätzlich zu den Schaltfunktionen, die evtl. bereits auf freien Bögen aufgrund des Maximumprinzips wirksam sind).

Als numerisch günstigste Formulierung hat sich bisher erwiesen, t^1 und t^2 als zusätzliche Variable einzuführen, und die Zeitschalter

$$(59) \quad Q_1 = t - t^1, \quad Q_2 = t - t^2$$

zur Bestimmung von Auf- und Absprungpunkt zu wählen. Für t^1, t^2 kommen noch zwei Differentialgleichungen und zwei Punktbedingungen hinzu

$$(60) \quad \dot{t}^1 = 0, \quad \dot{t}^2 = 0$$

$$H(t^1+) - H(t^1-) = 0, \quad H(t^2+) - H(t^2-) = 0$$

bzw. die äquivalenten Bedingungen (36-40).

Damit haben wir also insgesamt ein Mehrpunkttrandwertproblem mit $2n [+1]$ Differentialgleichungen und $2n [+1]$ Randbedingungen, zu denen je Randbogen $q+2$ weitere Variable und $q+2$ Punktbedingungen sowie ein Sprung hinzukommen. Dem

$z(t)$ aus dem allgemeinen MPRWP (47-52) entspricht hier der Vektor
 $(x(t), \lambda(t) \begin{bmatrix} T \\ \vdots \\ v_0, \dots, v_{q-1}, t^1, t^2 \end{bmatrix})$.

Alternativ zum Zeitschalteransatz (59) kann man grundsätzlich auch die Stetigkeitsbedingungen für die Hamiltonfunktion - bzw. (36-40) - oder eine der Anschlußbedingungen (57) als Schaltfunktionen wählen.

Praktisch in Frage kommen dabei die Ansätze für den Aufsprungpunkt:

$$\begin{aligned}
 (61) \quad Q_1 &= u^{\text{frei}}(x(t), \lambda(t)) - u^{\text{rand}}(x(t)) \\
 Q_1 &= g(x(t), u^{\text{frei}}(x(t), \lambda(t))) \\
 Q_1 &= g(x(t))
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{falls } q = 0 \\ \\ \text{falls } q = 1 \text{ und } u \text{ linear} \end{array}$$

für den Absprungpunkt:

$$\begin{aligned}
 (62) \quad Q_2 &= u^{\text{frei}}(x(t), \lambda(t)) - u^{\text{rand}}(x(t)) \\
 Q_2 &= g^{(q)}(x(t), u^{\text{frei}}(x(t), \lambda(t))) \\
 Q_2 &= \mu(t)
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{falls } u \text{ nichtlinear} \\ \\ \text{falls } q = \underline{1} \end{array}$$

Andere Kombinationen sind entweder numerisch unbrauchbar, z.B. weil im Lösungspunkt die Zeitableitungen der Schalter verschwinden, oder bedeuten einen höheren Aufwand, weil weitere Schaltpunkte auch auf freien Bögen auftreten können und die Identifizierung durch zusätzliche Schaltfunktionen vorgenommen werden muß.

Wenn gute Schätzungen der Auf- und Absprungpunkte gegeben sind - wie z.B. bei Homotopien (Abschnitt 5) - sollte man dem Zeitschalteransatz (59,60) den Vorzug über (61,62) geben.

Er ist einfacher zu programmieren und besitzt einige günstige numerische Eigenschaften, die i.a. schneller und vor allem zuverlässiger zur Konvergenz der Mehrzielmethode führen, besonders in Verbindung mit Homotopieverfahren (siehe auch (4.2), (5.3.2))

Ansätze nach (61,62) sind sinnvoll, wenn keine guten Schätzungen der Schaltpunkte vorliegen.

3.3 MPRWP für Berührungspunkte

Die Formulierung eines Mehrpunktrandwertproblems für Berührungspunkte ist relativ einfach.

Für jeden Berührungspunkt t^b kommt zunächst eine weitere Variable v_0 und eine Punktbedingung hinzu

$$(63) \quad \dot{v}_0 = 0 \quad ; \quad g(x(t^b)) = 0$$

und ein Sprung in den adjungierten Variablen

$$(64) \quad \lambda(t^b+) = \lambda(t^b-) + v_0 g_x(x(t^b))$$

muß ausgeführt werden.

Die kanonischen Differentialgleichungen bleiben ungeändert, dennoch muß t^b durch eine Schaltfunktion festgelegt werden. Diese wählt man am besten als Zeitschalter

$$(65) \quad Q_b = t - t^b$$

indem man analog (59,60) eine zusätzliche Variable t^b mit der Stetigkeit der Hamiltonfunktion als Punktbedingung wählt

$$(66) \quad \dot{t}^b = 0 \quad ; \quad H(t^b+) - H(t^b-) = 0 \text{ bzw. } g^{(1)}(x(t^b)) = 0$$

Grundsätzlich könnte man auch $g^{(1)}(x(t))$ als Schaltfunktion wählen, allerdings hat diese im allgemeinen mehrere Nullstellen, so daß zur Identifizierung eine weitere Schaltfunktion, etwa $g(x(t)) - \delta$, $0 < \delta < 1$, mitgeführt werden müßte. Die Wahl von $g(x(t))$ selbst als Schalter ist aus numerischen Gründen ausgeschlossen, da dieser im Berührungspunkt eine doppelte Nullstelle hat.

4. Numerische Behandlung von Mehrpunktrandwertproblemen mit Schalt- und Sprungbedingungen

Bei den in Abschnitt 3 hergeleiteten MPRWP handelt es sich um numerisch sehr anspruchsvolle Randwertprobleme, für deren numerische Behandlung nur die Mehrzielmethode nach Bulirsch in Frage kommt.

Besonders geeignet ist hierfür die Routine OPTSOL (Bulirsch [6], Bulirsch, Stoer, Deuffhard [7]), die eine direkte Behandlung von Schalt- und Sprungbedingungen und in ihrer Erweiterung nach [4] die direkte Behandlung von Mehrpunktbedingungen gestattet.

4.1 Die Mehrzielmethode für MPRWP

Da die Mehrzielmethode in anderen Arbeiten bereits ausführlich beschrieben worden ist, sei sie hier nur kurz skizziert.

Ausgehend von einer geeignet gewählten Zerlegung des Integrationsintervalls

$$(67) \quad a =: \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{M-1} < \tau_M := b$$

und Schätzungen s_i der Lösung $z(t)$ an den Stützstellen τ_i wird auf jedem Teilintervall $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ ein Anfangswertproblem mit s_i als Anfangswert gelöst.

Dabei werden während der Integration stets die Vorzeichen der Schaltfunktionen geprüft, und auftretende Schaltpunkte numerisch bestimmt (Schaltpunktsuche).

Im Schaltpunkt werden Sprungbedingungen explizit ausgeführt, Punktbedingungen werden ausgewertet und zwischengespeichert.

Die so erhaltene Trajektorie

$$(68) \quad z(t, S), S := (s_1, \dots, s_{M-1}) \text{ ("diskrete Trajektorie")}$$

genügt damit den Differentialgleichungen, Schalt- und Sprungbedingungen, zusätzlich muß aber noch die Erfüllung der Mehrpunktrandbedingungen (52) und die Stetigkeit der Trajektorie in den Stützstellen gefordert werden. Dies ergibt die typischen Mehrzielgleichungen

$$(69) \quad H(S) = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} R(s_1, z(t^1; S), \dots, z(t^k; S), z(b; S)) = 0 \\ z(\tau_i^-; S) - s_i = 0 \quad , \quad (i = 2, \dots, M-1) \end{array} \right)$$

Dieses i.a. hochgradig nichtlineare Gleichungssystem wird mit einem modifizierten

Newtonverfahren nach Deuffhard ([8], [9]) gelöst.

Die hierzu benötigten Funktionalmatrizen müssen durch numerische Differentiation und Broydenapproximationen berechnet werden, wobei die spezielle Struktur der Ableitungen ($z(t;S)$ hängt nur vom s_1 der vorhergehenden Stützstelle ab) rechenzeit- und Speicherplatzsparend berücksichtigt wird (vergl. [4], [6]).

Eine Behandlung innerer Punktbedingungen ist auch mit einer Zweipunkttrandwertversion von OPTSOL möglich. Nach Bulirsch [6] transformiert man dazu eine Punktbedingung

$$(70) \quad P(\hat{t}, z(\hat{t})) = 0 \quad (\hat{t} \text{ Schaltpunkt})$$

durch Einführung einer zusätzlichen Variablen $w(t)$ mit den Differentialgleichungen und Anfangswerten

$$(71) \quad \dot{w}(t) = \begin{cases} \partial P(t, z(t)) / \partial t + \partial P(t, z(t)) / \partial z \cdot F(t, z(t), \text{sign}(Q(t, z(t)))) & , t \leq \hat{t} \\ 0 & , t > \hat{t} \end{cases}$$
$$w(a) - P(a, z(a)) = 0$$

auf eine äquivalente Randbedingung, nämlich

$$(72) \quad w(b) = 0$$

Gegenüber der direkten Behandlung nach [4] hat dieses Vorgehen aber den Nachteil, daß der Rechenaufwand durch eine zusätzliche Differentialgleichung je Punktbedingung erhöht wird. Nicht unterschätzen darf man außerdem den zusätzlichen Programmieraufwand mit der Möglichkeit zu Programmierfehlern.

4.2 Schaltfunktionen und Konvergenzbereich

Trotz des im allgemeinen ausgezeichneten Konvergenzverhaltens der Mehrzielmethode und des zur Lösung der Mehrzielgleichungen verwendeten Newtonverfahrens kann es zu Konvergenzschwierigkeiten kommen, wenn die Startdaten nicht in einem Differenzierbarkeitsgebiet des durch (69) definierten Mehrzieloperators H liegen, welches die Lösung einschließt.

In diesem Fall ist eine wesentliche Voraussetzung zur Konvergenz des Newtonverfahrens nicht gegeben!

Untersuchungen der Differenzierbarkeitseigenschaften von H bei MPRWP zeigen ([3]), daß diese Voraussetzungen i.a. nur erfüllt sind, wenn gilt

(73) Die Starttrajektorie hat - auf allen Teilintervallen $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ der Mehrzielmethode - die gleiche Schaltstruktur wie die Lösung.

Nur dann kann also die gewohnte, problemlose Konvergenz erwartet werden.

Die Größe dieses Differenzierbarkeitsgebietes, und damit die erforderliche Genauigkeit der Startdaten, hängt wesentlich von der Wahl der Schaltfunktionen ab.

Werden die Schaltpunkte t^j als Nullstellen von Schaltern Q^j bestimmt, die von Zustands- und adjungierten Variablen abhängen, wie z.B.

$$(74) \quad Q^j(t, z(t)) = u^{\text{frei}}(x(t), \lambda(t)) - u^{\text{rand}}(x(t)) ,$$

so sind sie oft außerordentlich empfindlich gegenüber Störungen, insbesondere der adjungierten Variablen (siehe z.B. [2], Pesch [21]). Schon geringe Fehler in den Startdaten können dann die Schaltstruktur zerstören, d.h. das Differenzierbarkeitsgebiet um die Lösung ist klein.

Hat man dagegen gute Schätzungen der Lage der Schaltpunkte t^j , so empfiehlt es sich, einen reinen Zeitschalteransatz zu machen ([2, Kap. 2.3]). Hierzu führt man sämtliche t^j - auch solche auf freien Bögen - als Variablen mit (74) als zugehöriger Punktbedingung ein

$$(75) \quad \dot{t}^j = 0 \quad , \quad Q^j(t^j, z(t^j)) = 0$$

und bestimmt über Zeitschalter

$$(76) \quad \hat{Q}^j(t, \hat{z}(t)) = t - t^j$$

die Schaltpunkte, die jetzt nicht mehr explizit von x und λ abhängen.

Bedingung (73) kann also nur noch bei einer falschen Schätzung der Schaltpunkte verletzt werden! Das Differenzierbarkeitsgebiet des erweiterten MPRWP um die Lösung ist damit "größer", die Ansprüche an die Startdaten sind geringer.

Der Konvergenzbereich der Mehrzielmethode wird durch den Zeitschalteransatz i.a. wesentlich vergrößert, der Ansatz ist also zuverlässiger.

Trotz der höheren Dimension des zugehörigen MPRWP erhält man i.a. auch kürzere Rechenzeiten, da die zusätzliche nichtlineare Verkopplung der Differentialgleichungen (50) über die Schaltbedingungen (74) entfällt. Die dadurch bewirkte Glättung der Differentialgleichungen und des Mehrzieloperators verbessert das Konvergenzverhalten. Hinzu kommt, daß für Zeitschalter eine Schaltpunkt-

suche vermieden werden kann.

Speziell bei Homotopien (Abschnitt 5), bei denen stets sehr gute Schätzungen der Schaltpunkte vorliegen, empfehlen wir deshalb, mit dem Zeitschalteransatz (75,76) zu arbeiten (vergl. auch (5.3)).

Bemerkung: Numerisch ist es manchmal günstiger, die Differenz der Schaltpunkte als Variablen einzuführen, und dabei ggf. die freie Endzeit mit einzubeziehen (vergl. (87,88)). Mit solchen Ansätzen wurden in [2] Steuerungen mit bis zu 7 Randbögen und 20 Schaltpunkten berechnet!

5. Homotopieverfahren

Um die zur Aufstellung des MPRWP benötigten Informationen über die Struktur der zustandsbeschränkten optimalen Lösung, also über die Reihenfolge und Lage von Randbögen und Berührungspunkten zu erhalten, und um gleichzeitig hinreichend genaue Startdaten für die Konvergenz der Mehrzielmethode zu gewinnen, bietet sich in idealer Weise die Durchführung einer Homotopie an.

Homotopieverfahren (auch Fortsetzungsverfahren genannt) sind besonders in den letzten Jahren Gegenstand einer Reihe von Arbeiten gewesen. Im folgenden soll auf einige Aspekte eingegangen werden, die für zustandsbeschränkte Steuerungsprobleme wesentlich sind,

5.1 Das Fortsetzungsprinzip

Die Grundidee des Homotopieverfahrens besteht darin, zunächst ein vereinfachtes Problem anstelle des ursprünglichen zu lösen und dessen Lösung dann sukzessive in die des Originalproblems zu deformieren.

In unserem Fall heißt das konkret, daß wir zunächst einmal versuchen, das einfachere, unbeschränkte Steuerungsproblem (1-4) zu lösen. Gelingt dies, so genügt dessen Lösung aber auch der Zustandsbeschränkung

$$(77) \quad g(x(t)) \leq \underline{\epsilon}$$

$$\text{mit } \epsilon = \epsilon^{\text{frei}} := \max_{t \in [0, T]} g(x^{\text{frei}}(t))$$

Ist $\epsilon^{\text{frei}} > 0$, so lösen wir hiervon ausgehend eine Folge ständig verschärfter zustandsbeschränkter Probleme für

$$(78) \quad \epsilon^{\text{frei}} = \epsilon_0 > \epsilon_1 > \dots > \epsilon_r = \bar{\epsilon} \quad ,$$

indem wir die Lösungsdaten $S(\epsilon_i)$ der zugehörigen Mehrzielgleichungen

$$(79) \quad H(S, \epsilon_i) = 0 \quad ,$$

die jetzt auch vom Wert des Homotopieparameters ϵ abhängen, als Startdaten des Problems mit ϵ_{i+1} wählen. ($\bar{\epsilon}$ entspreche dem Originalproblem)

Hängen die Lösungsdaten - hier die diskrete Trajektorie S der Mehrzielmethode - stetig von ϵ ab, so lassen sich durch Verkleinern der Schrittweiten $\epsilon_{i+1} - \epsilon_i$ prinzipiell beliebig genaue Startdaten erreichen.

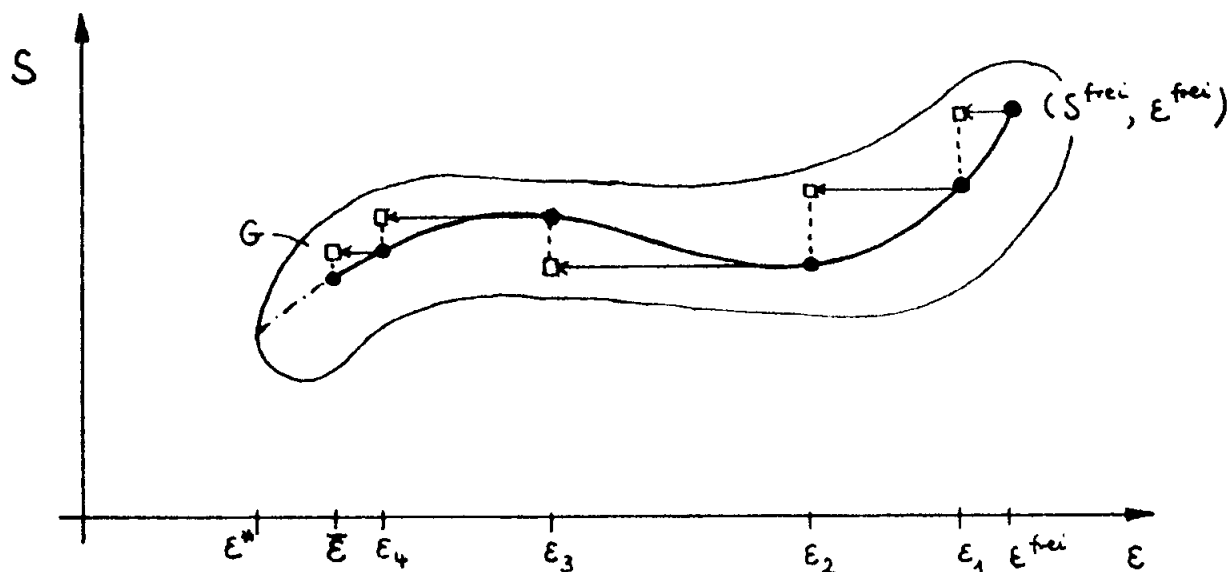


Fig. 3: Das Fortsetzungsprinzip

Eine Rechtfertigung für die Anwendung des Homotopieverfahrens liefert der folgende Satz (nach [3]):

Satz 4:

(80) Sei $S: [\bar{\epsilon}, \epsilon^{\text{frei}}] \rightarrow \mathbb{R}^{N(M-1)}$ ein stetiges Lifting der Mehrzielgleichungen $H(S, \epsilon) = 0$ durch $(S^{\text{frei}}, \epsilon^{\text{frei}})$, d.h. $S^{\text{frei}} = S(\epsilon^{\text{frei}})$ und $H(S(\epsilon), \epsilon) = 0, \epsilon \in [\bar{\epsilon}, \epsilon^{\text{frei}}]$

(81) Sei weiter H stetig differenzierbar auf einem Gebiet

$$G \supset \Gamma = \{(S(\epsilon), \epsilon) \mid \epsilon \in [\bar{\epsilon}, \epsilon^{\text{frei}}]\}$$

$E := H_S$ sei regulär auf Γ und lipschitzstetig auf G

(82) Dann gibt es eine endliche Homotopiekette

$$\epsilon^{\text{frei}} > \epsilon_1 > \dots > \epsilon_r = \bar{\epsilon},$$

so daß das (gedämpfte) Newtonverfahren für $H(S, \epsilon_{i+1}) = 0$ mit dem Startwert $S(\epsilon_i)$ konvergiert. $S(\epsilon)$ ist stetig differenzierbar.

(83) Ist E regulär auf G , kann das Lifting bis an den Rand von G eindeutig fortgesetzt werden, d.h. auf ein Intervall $]\epsilon^*, \epsilon^{\text{frei}}]$ mit $\lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon^*} (S(\epsilon), \epsilon) \in \partial G$. Auf jedem kompakten Teilintervall $[\bar{\epsilon}, \epsilon^{\text{frei}}]$ gilt $\epsilon \rightarrow \epsilon^*$

(82) analog. ■

5.2 Singuläre Punkte

Im allgemeinen ist ein a priori Nachweis der Existenz eines globalen Liftings vom vereinfachten bis hin zum Originalproblem nicht möglich. Man muß sich deshalb mit Aussagen begnügen, die, ausgehend von einem bereits erreichten Wert ϵ_1 , eine Fortsetzbarkeit der Homotopie garantieren.

Explizite Regularitätskriterien, unter denen dies für Homotopien von MPRWP garantiert werden kann, werden in [3] angegeben. Aus ihnen folgt, daß eine Homotopie eines MPRWP im Sinne von Satz 4 solange fortgesetzt werden kann, bis sich

(Typ 1) die Schaltstruktur der Lösung ändert und damit der Rand des Differenzierbarkeitsgebietes erreicht wird, oder

(84)

(Typ 2) bis E , die Iterationsmatrix des Newtonverfahrens, singulär wird.

Während der Durchführung einer Homotopie der Zustandsbeschränkung kommt es häufiger vor, daß man an einen "singulären Punkt" vom Typ 1 gelangt (seltener auch vom Typ 2). In einem solchen Punkt konvergiert die Mehrzielmethode nicht, in einer Umgebung davon beliebig schlecht!

Die Homotopie läßt sich allerdings meistens, wenn auch mit veränderter Schaltstruktur und evtl. entsprechend verändertem MPRWP, nach dem singulären Punkt weiterführen.

Praktisch geht man dabei so vor, daß man die Homotopie zunächst möglichst dicht an den singulären Punkt "heranschiebt", um den Grenzwert des Homotopieliftings näherungsweise zu bestimmen.

Noch besser ist es, die "Grenzlösung" exakt zu bestimmen. Dies ist möglich über erweiterte MPRWP, in denen der Homotopieparameter als zusätzliche Variable, und die Verletzung des betroffenen Regularitätskriteriums als zusätzliche Bedingung auftritt (siehe [2, Kap. 3] für den Typ 1, Seydel [22] für den Typ 2).

Ändert sich im singulären Punkt die Anzahl der Randbögen nicht, oder handelt

es sich um eine Zustandsbeschränkung der Ordnung $q = 0$, so führt der Homotopieweg i.a. zwar nicht differenzierbar, aber doch stetig über den singulären Punkt weg.

Ändert sich dagegen die Anzahl der Randbögen ($q \geq 1$), ist Vorsicht geboten. In diesem Fall bleiben zwar die Zustandsvariablen meistens stetig, die adjungierten Variablen aber können als Funktion des Homotopieparameters unstetig werden!

Das Verschwinden eines Randbogens oder den Zusammenschluß zweier Randbögen während einer Homotopie kann man unmittelbar feststellen. Das Auftreten eines Randbogens erkennt man an der Verletzung der Zustandsbeschränkung, die Aufteilung eines Randbogens in einen oder mehrere an der Verletzung der Vorzeichenbedingungen (26) (Satz 2).

Sind die adjungierten Variablen unstetig, müssen durch eine Untersuchung des Grenzfalles Schätzungen für die Änderung der adjungierten Variablen gewonnen werden. In [2, Kap. 4] findet man ein Beispiel, in dem analytisch die Unstetigkeit berechnet wird.

Konstruktive numerische Algorithmen hierzu werden zur Zeit untersucht.

5.3 Hinweise zur praktischen Durchführung von Homotopien

Im folgenden werden einige praktische Hinweise zum homotopiegerechten Ansatz der Mehrzielmethode und des MPRWP, sowie zur Wahl der Homotopieschrittweite gegeben.

5.3.1 Variable Stützstellen

Eine Verletzung der Regularitätskriterien für die Fortsetzbarkeit der Homotopie ist auch dann gegeben, wenn sich die Schaltstruktur der Lösung zwar nicht auf $[a, b]$, aber auf den Teilintervallen $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ der Mehrzielmethode ändert, d.h. wenn ein Schaltpunkt über eine Stützstelle wandert. Dabei wird der Rand des Differenzierbarkeitsgebietes von H erreicht.

Diese Irregularität ist vermeidbar, wenn man die Stützstellen bei einer Verschiebung der Schaltpunkte während der Homotopie mit verschiebt.

Besonders günstig ist es, wenn die Lage der Stützstellen τ_i relativ zu ihren Nachbarschaltpunkten, z.B. $t^j < \tau_i < t^{j+1}$, festgehalten wird, d.h. wenn man

$$(85) \quad \tau_i(\epsilon) = t^j(\epsilon) \cdot \gamma + (t^{j+1}(\epsilon) - t^j(\epsilon)) \cdot (1-\gamma) \quad , \quad \gamma \in [0,1]$$

wählt ([3]). Seien etwa

$$(86) \quad 0 < t^1 < t^2 < \dots < t^k < T$$

die auftretenden Schaltpunkte. Eine einfache, eng mit (76) verwandte Realisierung dieser Forderung besteht darin, die Differenzen der Schaltpunkte

$$(87) \quad \Delta_j := t^{j+1} - t^j \quad (j = 0, \dots, k), \quad (t^0 := 0, t^{k+1} := T)$$

als Variablen einzuführen, und analog (55) durch Übergang zu einer neuen Zeit τ , beispielsweise

$$(88) \quad t = \sum_{i=0}^{j-1} \Delta_i + (\tau - j)\Delta_j \quad , \quad \tau \in [j, j+1] \quad (j = 0, \dots, K)$$

auf feste Schaltpunkte zu transformieren. Ein Verschieben von Schaltpunkten über Stützstellen ist damit ausgeschlossen, jeder Wert aus $[0, k+1]$ liefert eine Stützstelle mit der Eigenschaft (85).

5.3.2 Randwerthomotopien

Bei Homotopien der Mehrzielmethode für MPRWP kann der Homotopieparameter grundsätzlich in Differentialgleichungen, Schaltfunktionen, Sprüngen oder Randbedingungen auftreten.

Tritt er nur in den Randbedingungen auf, beeinflusst er nicht explizit die Integration der Trajektorie. Wie man leicht zeigt, führt bei solchen Randwerthomotopien $S(\epsilon_i)$ auf eine Starttrajektorie für ϵ_{i+1} , die alle Stetigkeitsbedingungen der Mehrzielgleichungen erfüllt, und alle Randbedingungen bis auf jene, in denen ϵ explizit auftritt. Insbesondere gilt:

(89) Bei Randwerthomotopien hat die Starttrajektorie stets die "richtige" Schaltstruktur, d.h. Konvergenzbedingung (73) gilt, solange die Homotopie im Sinne von Satz 4 überhaupt fortsetzbar ist!

Beim Zeitschalteransatz (59,60,66) tritt der Homotopieparameter ϵ für $q > 0$ nur in der Anschlußbedingung auf

$$(90) \quad g(x(t^1)) - \epsilon = 0$$

Wir haben also eine Randwerthomotopie, und es gilt (89)!

Verwendet man dagegen (90) als Aufsprungschalter, oder läßt sich wie bei $q = 0$ nicht vermeiden, daß ϵ auch in der Berechnung der Trajektorie explizit auftritt, so können schon bei kleinen Schrittweiten stark veränderte Trajektorien und Schaltstrukturen auftreten.

Mit einem einfachen "Kunstgriff" lassen sich aber auch solche Homotopien in eine Randwerthomotopie umformen ([2]). Man nimmt ϵ als zusätzliche Variable zu den Differentialgleichungen hinzu

$$(91) \quad \dot{\epsilon} = 0$$

mit der Randbedingung

$$(92) \quad \epsilon - \xi = 0$$

Mit ξ erhalten wir damit einen "neuen" Homotopieparameter, der nur in die Randbedingungen eingeht.

Im $(i+1)$ ten Homotopieschritt setzt man nun $\xi = \epsilon_{i+1}$ und startet die Mehrziel-
methode mit $(S(\epsilon_i), \epsilon_i)$, so daß (89) wieder gilt!

Für die erste Newtonkorrektur des (neuen) MPRWP gilt

$$(93) \quad \Delta S = - H_S^{-1}(S(\epsilon_i), \epsilon_i) H_\epsilon(S(\epsilon_i), \epsilon_i) \Delta \epsilon, \quad \Delta \epsilon = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i,$$

d.h. sie verläuft tangential zum (alten) Homotopielifting. Hierin ist ein weiterer Grund für das günstige numerische Verhalten dieser Methode zu sehen. Eine eingehende Untersuchung hierzu mit mehreren Testbeispielen findet man in Deuflhard, Pesch, Rentrop [11].

Es sei noch angemerkt, daß man bei natürlichen Randwerthomotopien, wie beim Zeitschalteransatz, keine wesentlichen Verbesserungen von dieser Transformation erwarten darf!

5.3.3 Wahl der Homotopieschrittweite

Wesentlich für die ökonomische Durchführung einer Homotopie ist die richtige Bemessung der Schrittweite.

Sie sollte einerseits möglichst groß sein, um ein Zuviel an Homotopieschritten zu vermeiden. Andererseits muß sie hinreichend klein sein, um zügige Konvergenz des Newtonverfahrens zu erzielen, und um ein Hinausschießen über das Differenzierbarkeitsgebiet und damit Divergenz zu vermeiden.

In einfachen Fällen kann man sich mit einer heuristischen Schrittweitensteuerung begnügen, etwa

$$(94) \quad \epsilon_{i+1} = \epsilon_i + \alpha(\epsilon_i - \epsilon_{i-1}) \quad ,$$

wobei man den Faktor α abhängig vom Konvergenzverhalten bei ϵ_i - z.B. Anzahl der benötigten Iterationen - größer oder kleiner als 1 wählt. Bei komplizierten Problemen ist dieses Vorgehen allerdings unökonomisch.

Eine effiziente, theoretisch fundierte Schrittweitensteuerung, die die beiden ersten Kriterien benutzt, wurde von Deuflhard [10] entwickelt. Sie basiert auf einer Abschätzung der maximalen Schrittweite, für die - bei hinreichend großem Differenzierbarkeitsgebiet - das Vollschrirt-Newtonverfahren noch konvergiert.

Eine effiziente Schrittweitensteuerung, die Divergenz durch Überschreiten des Differenzierbarkeitsbereiches vermeidet, wurde in [2] entwickelt. Eine Verbindung beider Ansätze wird zur Zeit untersucht.

Abschließend sei noch angemerkt, daß wesentlich größere Schrittweiten und damit eine signifikante Beschleunigung der Homotopie erreicht werden können, wenn man statt $S(\epsilon_i)$ Approximationen höherer Ordnung als Startdaten im $(i+1)$ ten Homotopieschritt wählt.

Deuflhard [10] kommt zu beträchtlichen Zeiteinsparungen durch tangentiale Approximationen in Verbindung mit der erwähnten Schrittweitensteuerung bei hochgradig nichtlinearen Problemen.

Ebenfalls erhebliche Zeitgewinne durch rationale und polynomiale Extrapolation aus bereits berechneten Lösungen werden in [2] bei Problemen mit komplizierten Differenzierbarkeitsverhältnissen erreicht.

6. Beispiele

Die folgenden Steuerungsprobleme mögen als Beispiele für die dargestellten Methoden, und zur Veranschaulichung der spezifischen Probleme dienen, die bei ihrer Anwendung auf Aufgabenstellungen der Praxis auftreten.

Sie stammen aus Diplomarbeiten von Pesch [21], Gillessen [13] und [2], deren Darstellung weitgehend übernommen wurde. Das erste (Space Shuttle) enthält eine Zustandsbeschränkung der Ordnung $q = 0$ (u nichtlinear), das zweite (Erzentslader) der Ordnung $q = 1$ (n linear) und das dritte der Ordnung $q = 2$ (u nichtlinear).

Es kann im übrigen nicht deutlich genug darauf hingewiesen werden, daß ohne die intensiven numerisch-praktischen Erfahrungen und Untersuchungen, die bei der Bearbeitung dieser und anderer Problemstellungen gemacht wurden, die Verfeinerung der numerischen Methoden und das tiefere Verständnis insbesondere kritischer Fälle gar nicht denkbar wären.

6.1 Reichweitenoptimierung der zweiten Stufe einer Space Shuttle bei einer Aufheizungsbeschränkung

Die zweite Stufe eines Raumtransporters (Space Shuttle) ist bei der Rückführung in die Erdatmosphäre so zu steuern, daß eine maximale seitliche Reichweite erreicht wird ($-A(T) = \min!$). Gleichzeitig soll die Aufheizung des Fahrzeuges durch die Reibung 2000°F ($\hat{=} 1093^{\circ}\text{C}$) nicht übersteigen.

Die Dynamik des Gleitfluges läßt sich näherungsweise durch die Differentialgleichungen beschreiben

$$(95) \quad \dot{v} = f_v(v, h, \gamma; c_A) = - F \cdot \rho(h) \cdot v^2 \cdot c_W(c_A) - g \cdot \sin \gamma \cdot \left(\frac{R}{R+h} \right)^2$$

(Tangentialgeschwindigkeit)

$$\dot{h} = f_h(v, \gamma) = v \cdot \sin \gamma$$

(Höhe über der Erdoberfläche)

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= f_\gamma(v, h, \gamma; c_A, \alpha) \\ &= F \cdot \rho(h) \cdot v \cdot c_A \cdot \cos \alpha - \frac{g \cdot \cos \gamma}{v} \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 + \frac{v \cdot \cos \gamma}{R+h} \end{aligned}$$

(Bahnneigungswinkel)

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= f_\chi(v, h, \gamma, \chi, \Lambda; c_A, \alpha) \\ &= - \frac{v}{R+h} \cdot \cos \gamma \cdot \cos \chi \cdot \tan \Lambda + F \cdot \rho(h) \cdot v \cdot c_A \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \gamma} \end{aligned}$$

(Bahnazimutwinkel)

$$\dot{\Lambda} = f_\Lambda(v, h, \gamma, \chi, \Lambda) = \frac{v}{R+h} \cdot \cos \gamma \cdot \sin \chi$$

(Eulerwinkel, seitliche Reichweite)

Zur Kontrolle wird außerdem der Eulerwinkel der Reichweite mitgerechnet

$$\dot{\Theta} = f_\Theta(v, h, \gamma, \chi, \Lambda) = \frac{v}{R+h} \cdot \cos \gamma \cdot \cos \chi \cdot \frac{1}{\cos \Lambda}; \quad \Theta(0) = 0.$$

Hierin sind

$$\rho(h) = \rho_0 \cdot \exp(-\beta \cdot h)$$

(Luftdichte)

$$c_W(c_A) = (c_{W0} + c_A^n)$$

(Widerstandsbeiwert)

Das System wird gesteuert über den Querneigungswinkel α und den Auftriebsbeiwert c_A , der hier als direkt beeinflussbar angenommen wird.

Die Konstanten haben die Werte: $c_{W0} = 0.04$, $n = 1.86$, $F \cdot \rho_0 = 3.08$, $\beta = 0.145$, $g = 9.80665_{-3}$, $R = 6371.2$ (in km, sec)

Erfüllt werden sollen die 8 Randbedingungen

$$(96) \quad \begin{aligned} v(0) &= 7.85, \quad h(0) = 95. \quad , \quad \gamma(0) = -1.25 \cdot \frac{\pi}{180}, \quad \chi(0) = 0, \quad \Lambda(0) = 0 \\ v(T) &= 1.116, \quad h(T) = 30. \quad , \quad \gamma(T) = -2.7 \cdot \frac{\pi}{180} \end{aligned}$$

Die Endzeit T ist frei.

Die Steuerung α unterliegt keinen Beschränkungen, der Auftriebsbeiwert c_A soll der Steuerungsbeschränkung

$$(97) \quad C_A \in [0, 0.6]$$

sowie der Aufheizungsbeschränkung (Zustandsbeschränkung)

$$(98) \quad g(v, h, c_A) = C_A - G(v, h) \leq \Delta C_A$$

genügen. Hierin ist $G(v, h)$ eine stark nichtlineare Funktion von Geschwindigkeit und Höhe, so konstruiert, daß die Erfüllung von (98) gerade einer Grenztemperatur von ca. $(2000. + 200. (\Delta C_A / 0.03))^\circ \text{F}$ entspricht. Gewünscht ist eine Lösung für $\Delta C_A = 0$. Als natürlicher Homotopieparameter bietet sich ΔC_A an.

Zunächst wird das Problem ohne Zustandsbeschränkungen gelöst. Mit der Hamiltonfunktion

$$(99) \quad H = \lambda_v f_v + \lambda_h f_h + \lambda_\gamma f_\gamma + \lambda_\chi f_\chi + \lambda_\Lambda f_\Lambda$$

ergeben sich die adjungierten Differentialgleichungen

$$(100) \quad \dot{\lambda}_v = - \frac{\partial}{\partial v} H, \quad \dot{\lambda}_h = - \frac{\partial}{\partial h} H, \quad \dot{\lambda}_\gamma = - \frac{\partial}{\partial \gamma} H,$$

$$\dot{\lambda}_\chi = - \frac{\partial}{\partial \chi} H, \quad \dot{\lambda}_\Lambda = - \frac{\partial}{\partial \Lambda} H$$

Diese scheinbar harmlos aussehenden Differentialgleichungen bilden zusammen mit (95) ein numerisch äußerst aufwendiges Differentialgleichungssystem. Wir schreiben nur die erste aus (zur Anschauung!)

$$(101) \quad - \dot{\lambda}_v = \lambda_v [2(c_{w0} + c_A^n) \cdot F \cdot \exp(-\beta h) \cdot v]$$

$$+ \lambda_\chi [C_A \cdot F \cdot \exp(-\beta h) \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \gamma} - \frac{\cos \gamma \cdot \cos \chi \cdot \tan \Lambda}{R+h}]$$

$$+ \lambda_\gamma [C_A \cdot F \cdot \exp(-\beta h) \cdot \cos \alpha + \frac{g \cdot \cos \gamma}{v^2} \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 + \frac{\cos \gamma}{R+h}]$$

$$+ \lambda_\Lambda \left[\frac{\cos \gamma \cdot \sin \chi}{R+h} \right] + \lambda_h \cdot \sin \gamma$$

Die Transversalitätsbedingungen liefern uns

$$(102) \quad \lambda_\Lambda(T) = 1, \quad \lambda_\chi(T) = 0, \quad H(T) = 0$$

Mit der trivialen Differentialgleichung für die freie Endzeit erhalten wir also 12 Differentialgleichungen mit 12 Randbedingungen.

Die Steuerungen ergeben sich aus dem Maximumprinzip. Wir fassen die Terme von H zusammen, die den Querneigungswinkel α oder den Auftriebsbeiwert C_A enthalten

$$(103) \quad H = F \cdot g(h) \cdot v \cdot (-v \cdot \lambda_v \cdot c_A^n + c_A \left[\frac{\lambda \chi}{\cos \gamma} \cdot \sin \alpha + \lambda_Y \cdot \cos \alpha \right]) + \text{weitere Terme}$$

Der Faktor vor der Klammer ist positiv, und mit etwas Analysis erhält man, daß das (eindeutige) Maximum der Hamiltonfunktion für $\alpha \in \mathbb{R}$, $c_A \in [0, 0.6]$ angenommen wird für

$$(104) \quad \begin{aligned} \sin \alpha^{\text{frei}} &:= \frac{\lambda \chi}{\cos \gamma} \cdot \frac{1}{w} & ; w &= \left(\left(\frac{\lambda \chi}{\cos \gamma} \right)^2 + \lambda_Y^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \cos \alpha^{\text{frei}} &:= \lambda_Y \cdot \frac{1}{w} \end{aligned}$$

$$(105) \quad c_A^{\text{frei}} := \begin{cases} 0.6 & \text{falls } Q_1 := -v \cdot \lambda_v \cdot n \cdot 0.6^{n-1} + w \geq 0 \\ \left(\frac{w}{v \cdot \lambda_v \cdot n} \right)^{\frac{1}{n-1}} & \text{sonst (aus } \frac{\partial}{\partial c_A} H = 0 \text{)} \end{cases}$$

Die Steuerung c_A und damit die rechte Seite der kanonischen Differentialgleichungen wird durch die "freie" Schaltfunktion Q_1 bestimmt. (95), (96), (100), (102) bilden zusammen mit (104, 105) ein vollständiges Randwertproblem mit Schaltbedingungen der Dimension 12.

Mit i.w. diesem Ansatz wurde in [21] zunächst eine unbeschränkte Lösung berechnet. Für diese gilt

$$(106) \quad \begin{aligned} \Delta c_A^{\text{frei}} &:= \max_{t \in [0, T]} g(v^{\text{frei}}(t), h^{\text{frei}}(t), c_A^{\text{frei}}(t)) \\ &= \max_{t \in [0, T]} (c_A^{\text{frei}}(t) - G(v^{\text{frei}}(t), h^{\text{frei}}(t))) = 0.115, \end{aligned}$$

d.h. bei der unbeschränkten Flugbahn wird die Space Shuttle auf ca. 2770^oF ($\hat{=}$ 1520^oC) aufgeheizt. Die maximale Temperatur wird nach ca. 270 sec bei einer Gesamtflugzeit von 2324.29 sec angenommen.

Der Verlauf von c_A und G ist in Figur 4a) dargestellt. Die übrigen Lösungsdaten findet man in Figur 5 bis 14. Die Abbildungen wurden mit geringfügigen Änderungen aus [21] (5-14) und [12] (4) übernommen.

Die Zustandsbeschränkung (98) hat offenbar die Ordnung $q = 0$, und durch Auflösen ergibt sich für die Steuerung auf einem Randbogen sofort

$$(107) \quad c_A^{\text{rand}} := G(v, h) + \Delta c_A$$

Da $q = 0$, treten Sprünge in den adjungierten Variablen nicht auf! Die adjungierten Differentialgleichungen für λ_v und λ_h ändern sich auf den Randbögen

(Satz 1)

$$(108) \quad \dot{H} = H - \mu(t) \cdot (C_A - G(v,h)) - \Delta C_A$$

$$\dot{\lambda}_v = - \frac{\partial}{\partial v} H + \mu(t) \frac{\partial}{\partial v} G(v,h)$$

$$\dot{\lambda}_h = - \frac{\partial}{\partial h} H + \mu(t) \frac{\partial}{\partial h} G(v,h)$$

Die übrigen adjungierten Differentialgleichungen ändern sich nicht, da γ , χ und Λ nicht explizit in G auftreten. Für die Variable $\mu(t)$ gilt $\mu \equiv 0$ auf freien Bögen, und

$$(109) \quad \mu(t) = \lambda' f_u / g_u^{(q)} = \frac{\partial}{\partial C_A} H = F \cdot g(h) \cdot v \left[-v \cdot \lambda_v \cdot n \cdot C_A^{n-1} + w \right]$$

auf Randbögen.

Ein Ansatz nach (61,62) erlaubt hier einen gemeinsamen Schalter für Auf- und Absprungpunkt

$$(110) \quad Q_2 = C_A^{\text{frei}} - C_A^{\text{rand}} = C_A^{\text{frei}} - G(v,h) - \Delta C_A$$

mit

$$(111) \quad Q_2 < 0 \Rightarrow \text{freier Bogen, } C_A = C_A^{\text{frei}}$$

$$Q_2 > 0 \Rightarrow \text{Randbogen, } C_A = C_A^{\text{rand}}$$

als Schaltvorschrift.

Mit diesem Ansatz wurden in [21] über eine Homotopie aufheizungsbeschränkte Lösungen für Werte von ΔC_A im Intervall $[0.008, 0.115]$ berechnet. Die maximale Aufheizung wurde dabei um 26% auf ca. 2050^oF ($\hat{=} 1120^{\circ}\text{C}$) gesenkt.

Der Verlauf der optimalen Steuerung C_A - sowie von C_A^{frei} , C_A^{rand} - für verschiedene Werte des Homotopieparameters ist in Figur 4 dargestellt.

Erwartungsgemäß weist die Lösung zunächst einen Randbogen in der Nähe des (unbeschränkten) Aufheizungsmaximums auf. Bei zunehmender Verschärfung der Zustandsbeschränkung kommen nacheinander drei weitere - kurze - Randbögen in der Nähe der Nebenmaxima hinzu ($\Delta C_A = 0.054$). Die weitere Verringerung von ΔC_A bewirkt eine Ausdehnung der Randbögen, die schließlich zu ihrem Zusammenschluß führen. Bei $\Delta C_A = 0.003$ tritt nur noch ein großer Randbogen auf.

Die Lösungsdaten des letzten Homotopieschrittes sind in Fig. 5 bis Fig. 14 wiedergegeben. Physikalisch interessant ist die Tatsache, daß der schwingende Verlauf der Flugbahn unter dem Einfluß der Aufheizungsbeschränkung geglättet wird, das typische "Pumpen" des Gleitfluges tritt erst nach Verlassen des Randbogens im letzten Drittel der Bahn wieder auf.

Wichtig ist ferner, daß der drastischen Senkung der Außentemperatur nur eine geringfügige Verschlechterung des Zielfunktional $\Lambda(T)$ um ca. 1.5% gegenübersteht. Die Gesamtflugzeit wurde um ca. 3.5% auf 2409.42 sec erhöht.

Die Durchführung der Homotopie erwies sich als numerisch überaus schwierig. Die Kondition der Iterationsmatrix stieg während der Homotopie auf ca. 10^{19} an. Die Homotopieschrittweiten durften über weite Strecken nicht größer als 0.001 gewählt werden, da sonst das Newtonverfahren divergierte.

Wegen des enormen Zeitaufwandes (der letzte Homotopieschritt erforderte ca. 18 min Rechenzeit auf einer IBM 370/165 bei einer Schrittweite von 0.0005!) wurde die Homotopie bei $\Delta C_A = 0.008$ schließlich abgebrochen.

Die Erklärung für dieses Verhalten liegt im durch die Formulierung des Problems bedingten außergewöhnlich kleinen Differenzierbarkeitsbereich des Mehrzieloperators.

Die ohnehin hochgradig nichtlinearen kanonischen Differentialgleichungen werden durch die Schaltfunktion (110) noch zusätzlich stark nichtlinear verknüpft, ihre Lösungen sind deshalb außerordentlich empfindlich gegenüber Störungen der Anfangswerte. (Man beachte die Minima und Maxima der Schaltfunktion nahe 0 in Fig. 4b) c) e) g), kleine Störungen können ein Auftauchen oder verschwinden von Randbögen bewirken!)

Da nun der Homotopieparameter explizit in Differentialgleichungen und Schaltfunktionen auftritt, bedeuten bereits kleine Homotopieschrittweiten so große Verzerrungen, daß die Starttrajektorie außerhalb des Differenzierbarkeitsgebietes liegt!

Durch die Transformation auf eine Randwerthomotopie (91,92) konnte in [11] das Verhalten der Homotopie schließlich soweit verbessert werden, daß auch Lösungen für $\Delta C_A < 0.008$ noch mit vertretbarem Zeitaufwand gerechnet werden konnten.

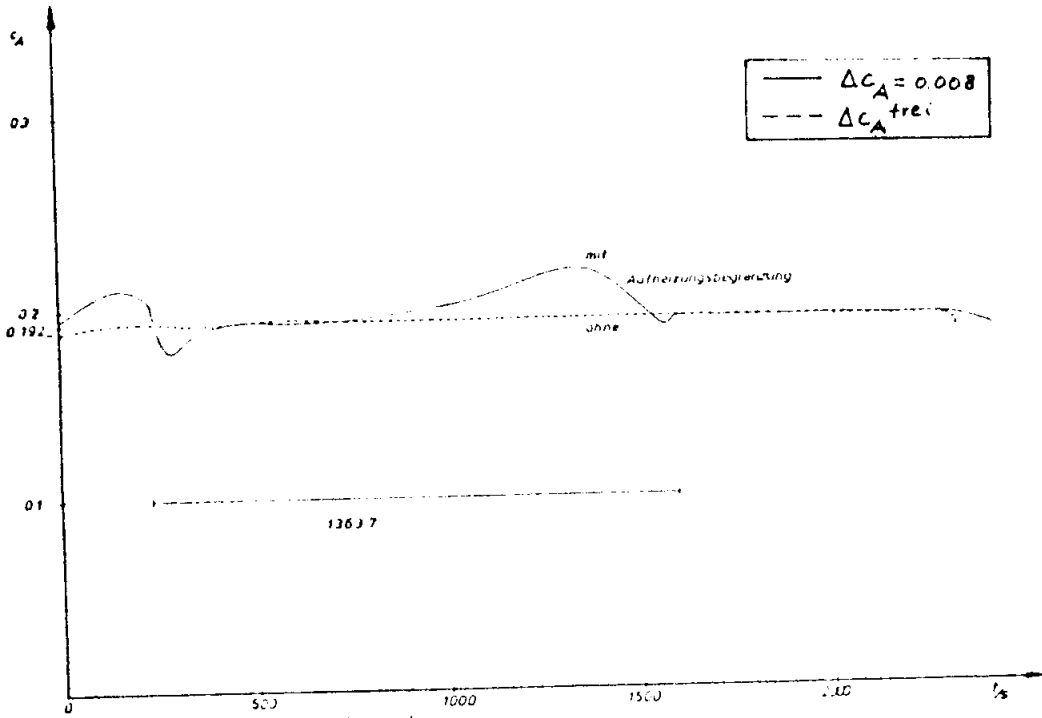


Fig. 5: Auftriebsbeiwert c_A

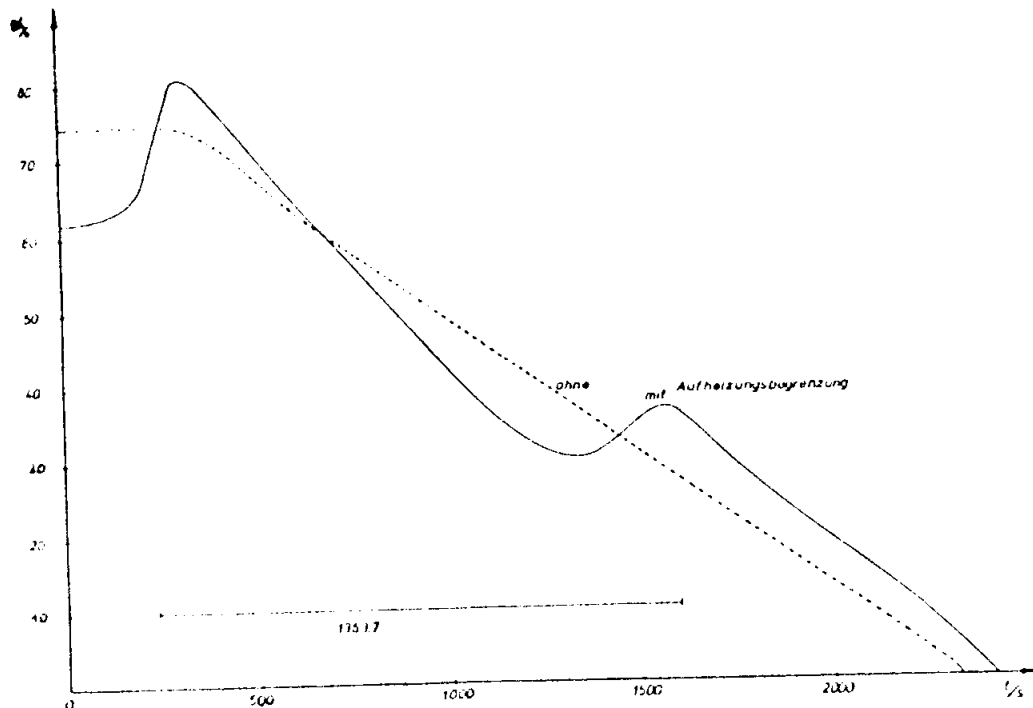


Fig. 6: Querneigungswinkel α

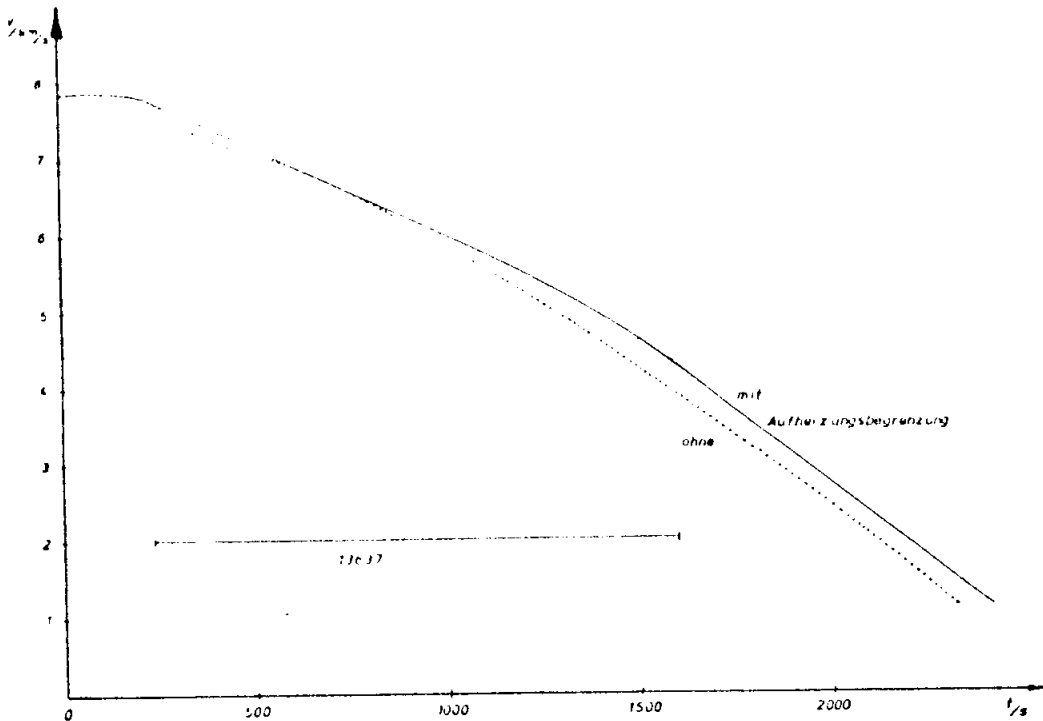


Fig. 7: Geschwindigkeit V

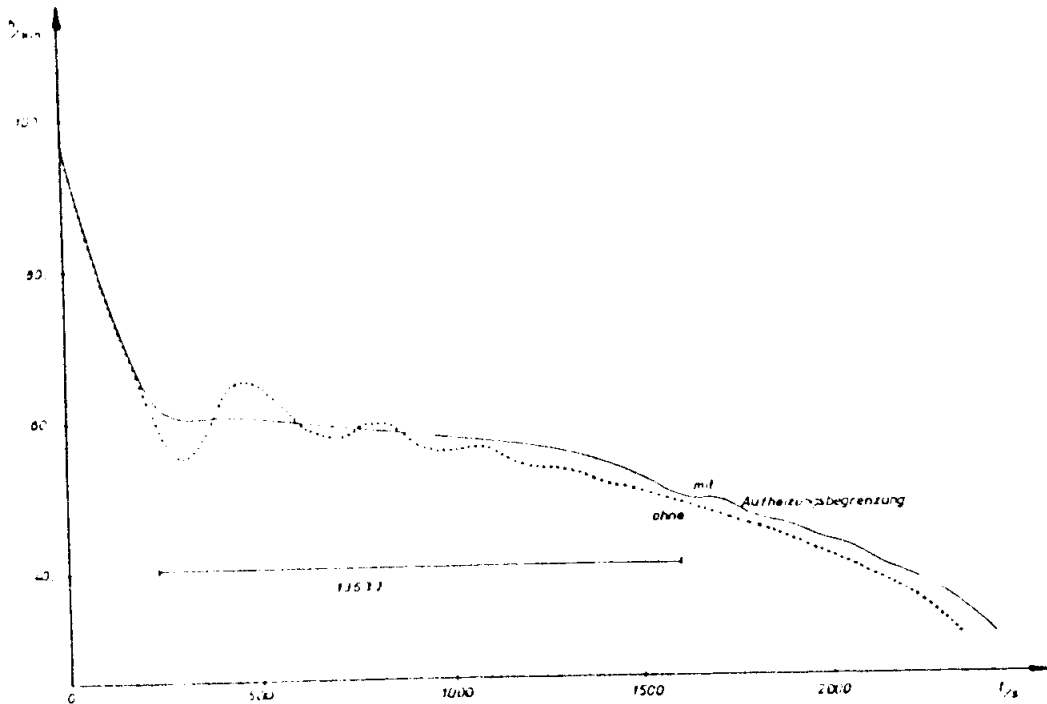


Fig. 8: Hohe h

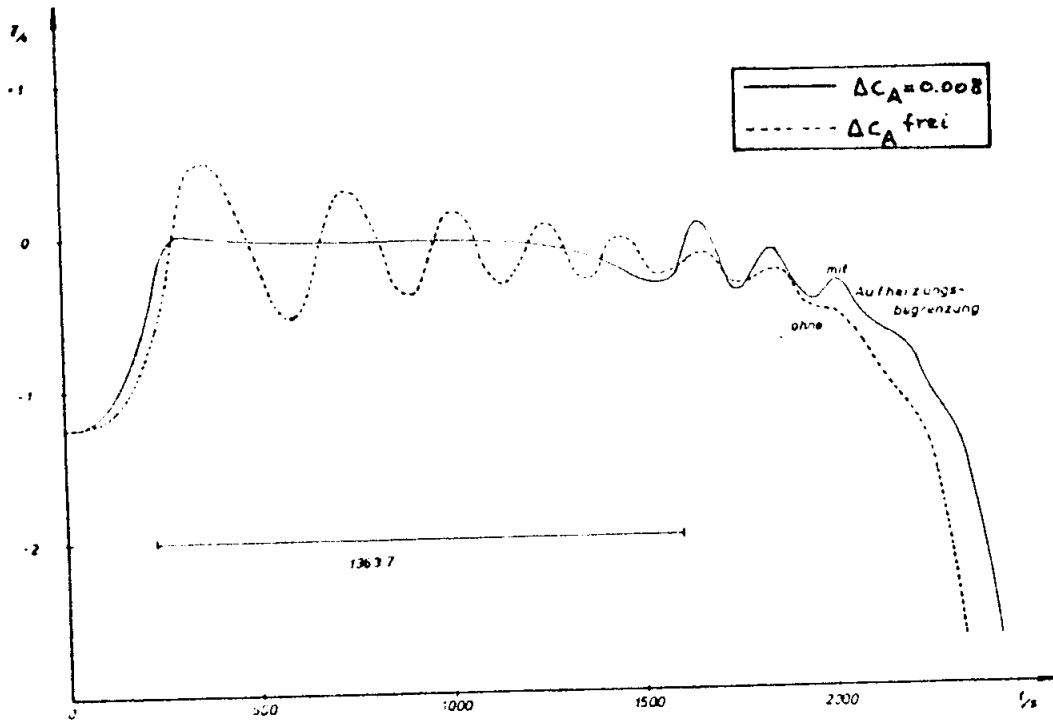


Fig. 9: Bahnneigungswinkel γ

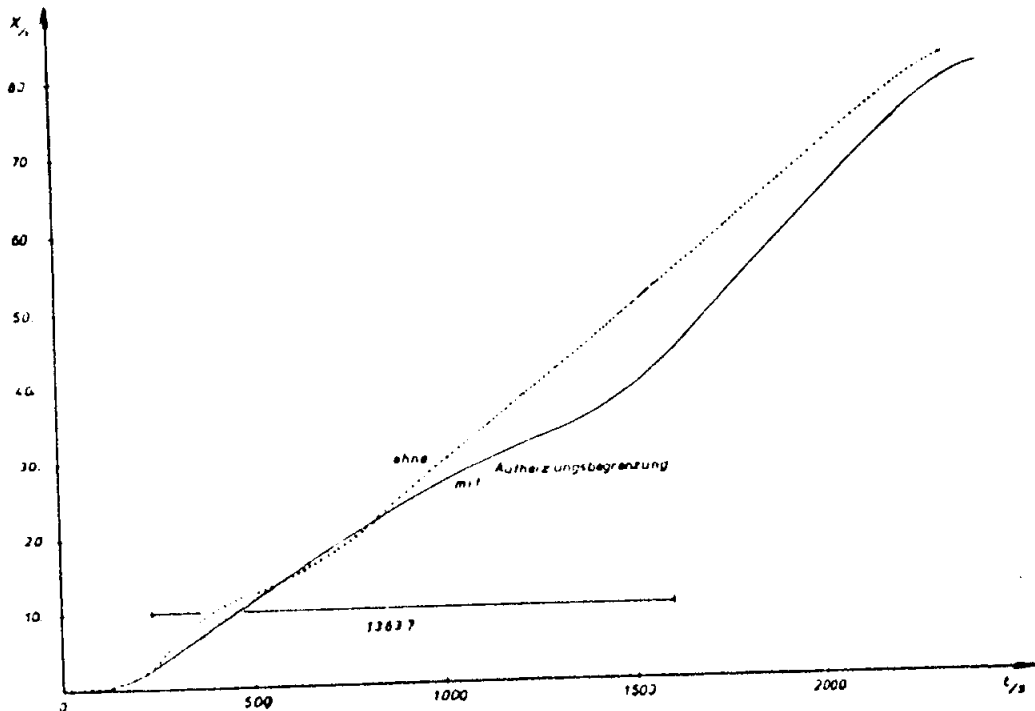
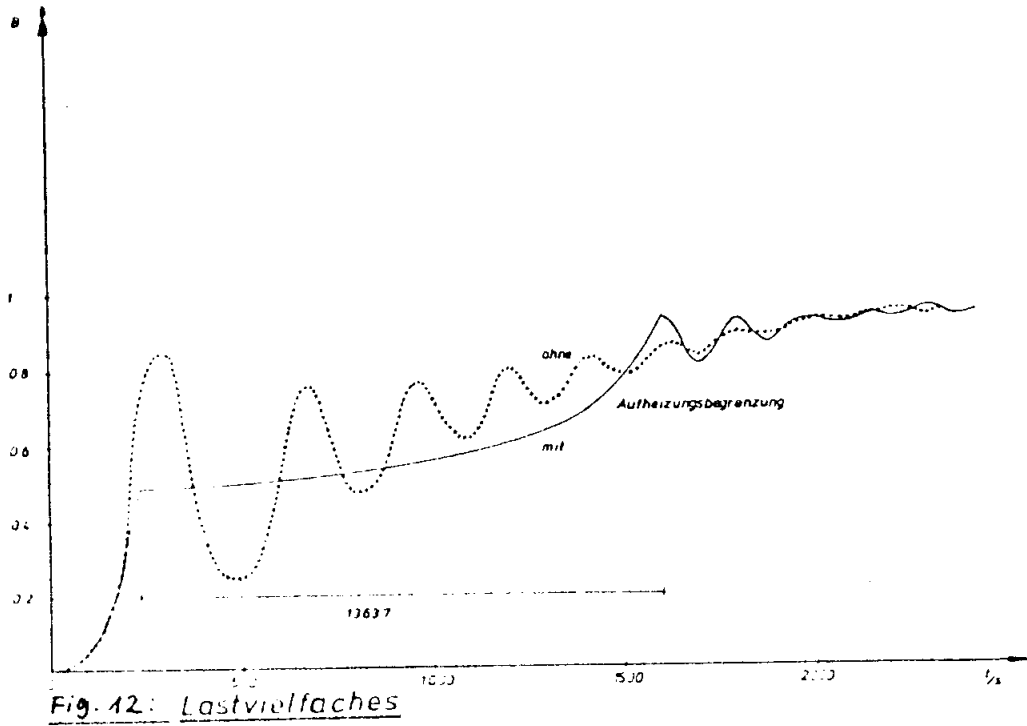
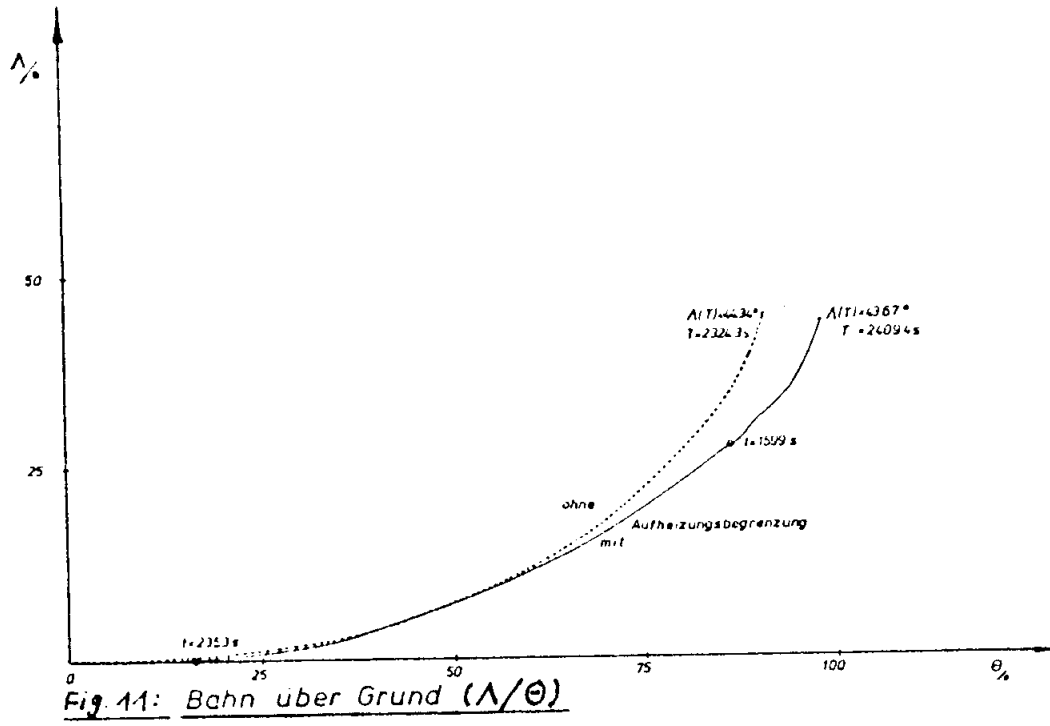


Fig. 10: Bahnazimutwinkel χ



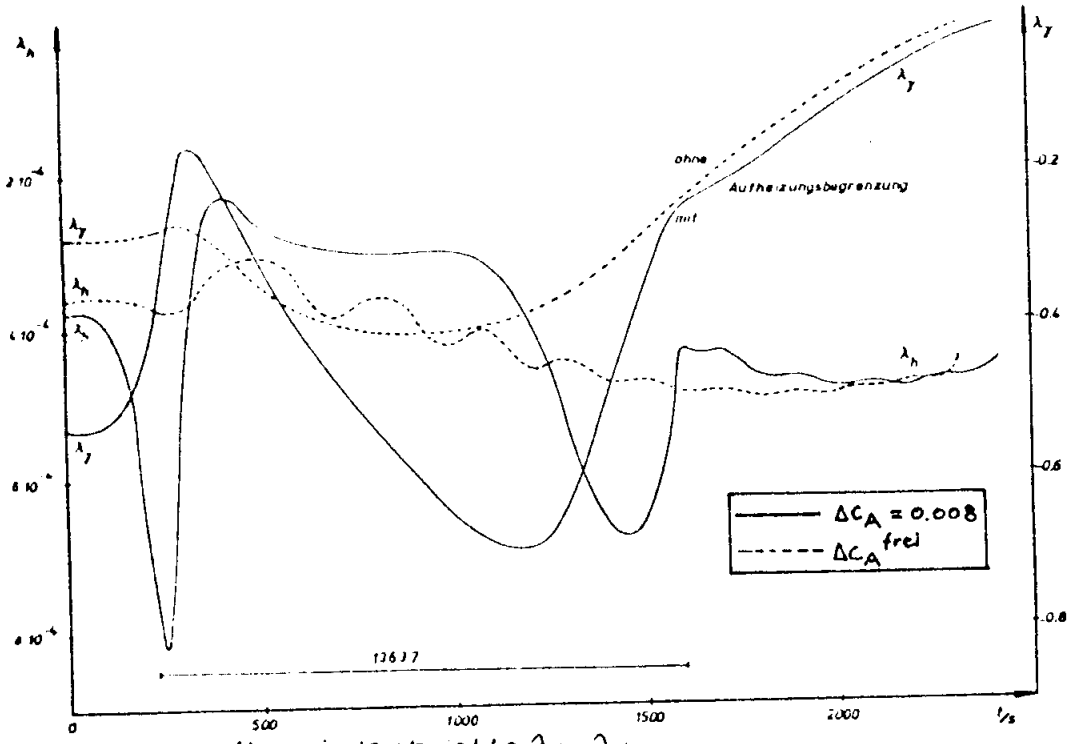


Fig 13: adjungierte variable λ_y, λ_h

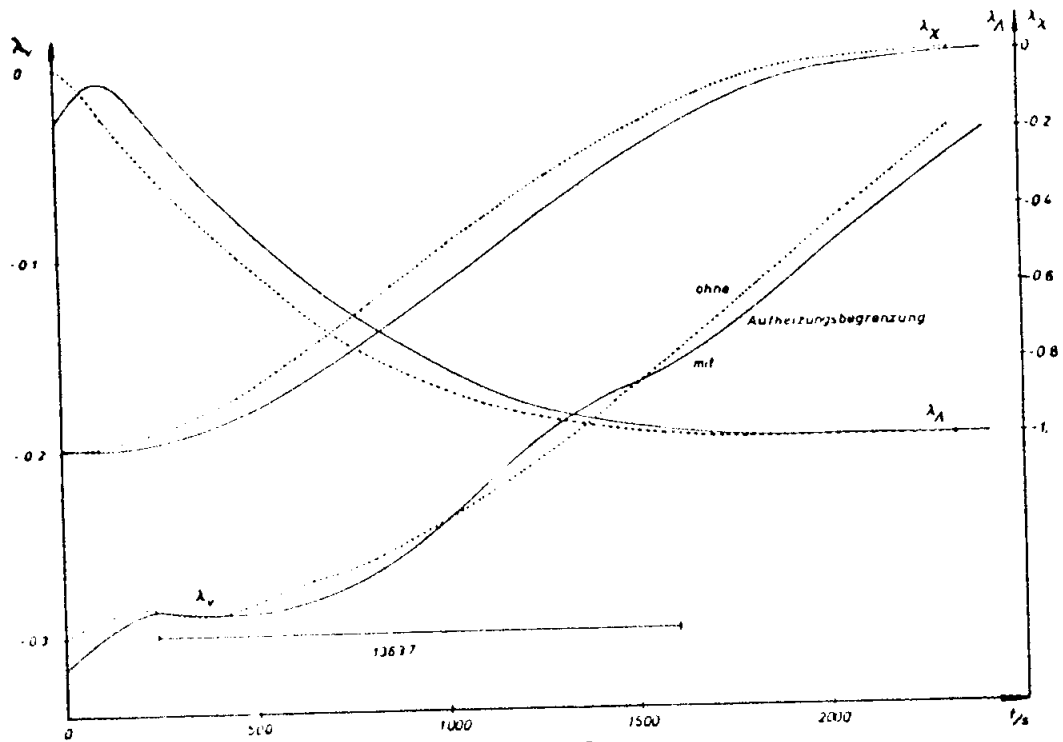


Fig 14: adjungierte variable $\lambda_v, \lambda_l, \lambda_x$

6.2 Zeitoptimale Steuerung eines Erzentladers bei Begrenzung der Höchstgeschwindigkeit

Eine auf Schienen fahrende Laufkatze mit frei darunter schwingendem Greifer soll so über eine Distanz E gesteuert werden, daß sich Laufkatze und Greifer im Anfangs- und Endpunkt in Ruhe befinden. Dabei ist die Gesamtfahrzeit zu minimieren ($T = \min!$). Die begrenzte Leistungsfähigkeit des Elektromotors wird dabei durch eine maximal erreichbare Geschwindigkeit berücksichtigt. Gefragt ist nach der Abhängigkeit der Lösungen von dieser Grenze.

Die Bewegung des Erzentladers genügt den Gleichungen

$$\dot{s} = - \frac{m \cdot g}{M} \alpha + \frac{F}{M} \quad (\text{Position der Laufkatze})$$

$$\ddot{\alpha} = - \frac{(m+M)g}{M \cdot h} \alpha + \frac{F}{M \cdot h} \quad (\text{Ausschlagwinkel des Greifers})$$

Dabei bedeuten: m , M Masse des Greifers bzw. der Laufkatze, h Absenktiefe des Greifers, g Erdbeschleunigung. Gesteuert wird das System über die Antriebskraft F des Elektromotors.

Dieses System läßt sich durch Normierung und eine lineare Transformation in die äquivalenten, rückwirkungsfreien Bewegungsgleichungen überführen

$$\begin{aligned} (112) \quad \dot{s} &= v \\ \dot{v} &= u \\ \dot{\theta} &= \mathcal{V} \\ \dot{\mathcal{V}} &= -\theta + u \end{aligned}$$

Die Steuerung u (Beschleunigung, Verzögerung) unterliegt dabei der Steuerungsbeschränkung

$$(113) \quad u \in [-1, 1]$$

und der Zustandsbeschränkung (Höchstgeschwindigkeit v_m)

$$(114) \quad g(v(t)) \leq v(t) - v_m$$

Zu erfüllen sind die 8 Randbedingungen

$$\begin{aligned} (115) \quad s(0) &= 0, \quad v(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \mathcal{V}(0) = 0 \\ s(T) &= E, \quad v(T) = 0, \quad \theta(T) = 0, \quad \mathcal{V}(T) = 0 \end{aligned}$$

Die Endzeit T ist frei.

Das auf den ersten Blick einfach erscheinende Steuerungsproblem ist Gegenstand etlicher, sowohl ingenieurwissenschaftlicher als auch mathematischer Untersuchungen. Kompliziert wird es vor allem durch die Zustandsbeschränkung, die je nach Wahl des Parameters v_m zu Lösungen mit beliebig vielen Randbögen führt. Eine vollständige Lösung gelang erstmals in [2].

Wir lösen zunächst das unbeschränkte Problem, um dann eine Homotopie im Parameter v_m durchzuführen.

Als Hamiltonfunktion erhalten wir

$$(116) \quad H = \lambda_s \cdot v + \lambda_0 \cdot \dot{y} - \lambda_y \cdot 0 + (\lambda_v + \lambda_y) \cdot u$$

und damit die adjungierten Differentialgleichungen

$$(117) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda}_s &= 0 & , & \quad \dot{\lambda}_v = -\lambda_s \\ \dot{\lambda}_0 &= \lambda_y & , & \quad \dot{\lambda}_y = -\lambda_0 \end{aligned}$$

d.h. λ_v ist eine Gerade, λ_y eine Sinusschwingung der Frequenz 1. Die Transversalitätsbedingungen liefern nur eine Bedingung für die Endzeit T

$$(118) \quad H(T) = (\lambda_v(T) + \lambda_y(T)) \cdot u(T) = 1$$

Das Maximumprinzip liefert uns sofort

$$(119) \quad u^{\text{frei}}(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } Q_1 := \lambda_v + \lambda_y \geq 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Steuerung u und damit die rechte Seite der kanonischen Differentialgleichungen wird durch die "natürliche" Schaltfunktion bestimmt (singuläre Steuerungen sind nicht möglich, siehe dazu [2]). Zusammen mit der trivialen Differentialgleichung für T bilden (112,115,117,118) ein vollständiges Randwertproblem der Dimension 9.

Die mit diesem Ansatz berechnete Lösung ist in Fig. 15 dargestellt. Die Daten gelten für E = 25. (Weitere Lösungen in [2])

Die optimale Steuerung ist dem Verlauf von v zu entnehmen: Es wird zunächst beschleunigt, dann kurz verzögert und erneut beschleunigt, schließlich wird abgebremst. Das zugehörige Schalterverhalten ist aus $\lambda_y, -\lambda_v$ zu ersehen, die Schnittpunkte sind die Schaltpunkte der Steuerung. Da die Lösung symmetrisch ist, wurde die Greiferschwingung nur auf $[0, T/2]$ angegeben.

Für die unbeschränkte Lösung gilt

$$v_m^{\text{frei}} = \max_{t \in [0, T]} v^{\text{frei}}(t) = 4.32996 ;$$

das Maximum wird bei $T/2 \pm 0.794829$ angenommen. Die Gesamtfahrzeit ist $T = 10.2496$.

Die Zustandsbeschränkung hat die Ordnung $q = 1$

$$(120) \quad g^{(0)}(v) = v - v_m$$

$$g^{(1)}(u) = u$$

Für die Steuerung auf einem Randbogen folgt hieraus sofort ((14), (15))

$$(121) \quad u^{\text{rand}} = 0$$

Im Aufsprungpunkt t^1 ist die Anschlußbedingung

$$(122) \quad g^{(0)}(v(t^1)) = v(t^1) - v_m$$

zu erfüllen, und - mit der Variablen v_0 - der Sprung

$$(123) \quad \lambda_v(t^1+) = \lambda_v(t^1-) + v_0 \frac{\partial}{\partial v} g^{(0)} = \lambda(t^1-) + v_0$$

auszuführen. Die übrigen adjungierten Variablen sind stetig, da $g^{(0)}$ von keiner anderen Zustandsvariablen abhängt.

Die Hamiltonfunktion geht über zu (Satz 1)

$$H \rightarrow H - \mu(t)g^{(1)} = H - \mu(t) \cdot u$$

die adjungierten Differentialgleichungen bleiben aber - auch auf den Randbögen - unverändert, da $g^{(1)}$ von keiner Zustandsgröße abhängt. Für die Variable $\mu(t)$ gilt $\mu = 0$ auf freien Bögen, und auf Randbögen

$$(124) \quad \mu(t) = \lambda' f_u / g_u^{(q)} = \frac{\partial}{\partial u} H = \lambda_v + \lambda_v$$

Wir benutzen μ nur zur Kontrolle der Vorzeichenbedingungen nach Satz 2, in den Differentialgleichungen tritt es hier nicht auf.

Nach dem in (4.2) vorgeschlagenen Prinzip bestimmen wir sämtliche Schaltpunkte über Zeitschalter

$$(125) \quad Q^j = t - t^j$$

und legen die Variablen t^j durch die Punktbedingungen

$$(126) \quad \lambda_v(t^j) + \lambda_{\dot{y}}(t^j) = 0$$

fest. Man beachte, daß dies für die Auf- und Absprungpunkte dem Zeitschalteralgorithmus (59,60) entspricht, weil Bedingung (125) nach (38,39) der Stetigkeit der Hamiltonfunktion äquivalent ist. Für die Schaltpunkte auf freien Bögen entspricht dies den Schaltbedingungen nach (119).

Aus dem Verlauf von $\lambda_{\dot{y}}, -\lambda_v$ in Fig. 16b bis Fig. 27b ist unmittelbar zu ersehen, daß die Bestimmung der Schaltpunkte durch diese Technik ein wesentlich größeres Differenzierbarkeitsgebiet des Mehrzieloperators liefert, als z.B. durch (61c), (62c) und (119)!

Außerdem werden hiermit Identifizierungsprobleme vermieden, die durch das Verschwinden von Q_1 sowohl in "freien" Schaltpunkten, als auch in Auf- und Absprungpunkten aufgetreten wären (typisch für Aufgaben mit linearer Steuerung!).

Man beachte, daß die Dimension des MPRWP um 3 Variablen (t^1, t^2, v_0) und Punktbedingungen je Randbogen, sowie 1 Variable und Punktbedingung je "freier" Schaltpunkt, erhöht wird.

Die im folgenden dargestellten Lösungen wurden in [2] mit einem solchen Ansatz berechnet. Allerdings wurde die Dimension der MPRWP dort durch Ausnutzung aller Symmetrien des Problems stark reduziert.

Wie zu erwarten, weist die zustandsbeschränkte Lösung zunächst zwei Randbögen auf (Fig. 16), die sich bei einer Verringerung der Höchstgeschwindigkeit bei $v_m = 3.97887 \cdot E/2\pi$ zu einem Randbogen zusammenschließen (Fig. 17). Dieser Grenzfall ist Spezialfall des folgenden, allgemeineren Falles

(127) Die optimale Lösung für $v_m = E/2\pi k$ ($k \in \mathbb{N}$) ist

$$u_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, v_m] \\ 0 & t \in [v_m, T_{\text{opt}} - v_m] \\ -1 & t \in [T_{\text{opt}} - v_m, T_{\text{opt}}] \end{cases}$$

$$\text{mit } T_{\text{opt}} = 2\pi \cdot k + v_m$$

Dieses Ergebnis bedeutet physikalisch, daß es für jede Fahrweite E eine Auswahl von Höchstgeschwindigkeiten gibt, für die die Lösung eine extrem einfache Gestalt hat.

In der Durchführung der Homotopie ist dieser Fall ein singulärer Punkt im Sinne von (5.2), die adjungierten Variablen werden als Funktion des Homotopieparameters unstetig! Die beiderseitigen Grenzwerte sind in Fig. 17b,c dargestellt. Mit diesen (theoretisch gewonnenen) Daten läßt sich die Homotopie weiter fortsetzen.

Es bleibt zunächst bei einem Randbogen (Fig. 18), bis vom (singulären) Punkt $V_m = 2.49461$ an zwei weitere Randbögen hinzukommen (Fig. 19,20).

Bei $V_m = 1.98944 = E/4\pi$ schließen sich diese drei wieder zu einem (singulären) Grenzfall vom Typ (127) zusammen (Fig. 21). Auch hier sind die adjungierten Variablen wieder unstetig! (Fig. 21b, c)

Setzt man bei einer Fortführung der Homotopie mit einer Schaltstruktur wie in Fig. 18 - mit einem Randbogen - an, erhält man eine Lösung, die allen notwendigen Bedingungen genügt, bei $t = T/2$ aber die Vorzeichenbedingungen (26) von Satz 2 verletzt!

Korrekt ist deshalb die Fortsetzung mit zwei Randbögen (Fig. 22). Im (singulären) Punkt $V_m = 1.98364$ ändert sich zunächst die Schaltstruktur auf dem ersten und letzten freien Bogen (Fig. 23,24), bis dann von $V_m = 1.72295$ (singulär) an insgesamt vier Randbögen auftreten (Fig. 25,26).

Bei $v_m = 1.32629 = E/6\pi$ schließen sich diese wieder zu einem Grenzfall vom Typ (127) zusammen. Die adjungierten Variablen werden wieder unstetig (Fig. 27b, c).

Bei einer Fortführung der Homotopie für kleinere Werte von v_m ist das Verhalten qualitativ ähnlich. An jedem Grenzfall vom Typ (127) verringert sich die Zahl der Randbögen um einen, und erhöht sich nach einer Weile dann wieder um zwei.

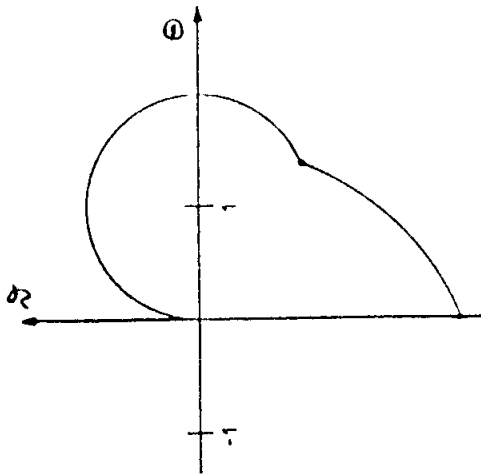
Die Abhängigkeit des Zielfunktional von Fahrweite E und Höchstgeschwindigkeit V_m - eine der Fragestellungen - ist in Fig. 28 dargestellt. Weitere Lösungsdaten, und eine Beschreibung der analytischen Methoden, mit denen Startdaten und Strukturänderungen in den Grenzfällen ermittelt wurden, findet man in [2].

Es sei übrigens darauf hingewiesen, daß keineswegs nur die singulären Grenzfälle $V_m = E/2\pi \cdot k$ besondere numerische Beachtung verdienen. Die übrigen singulären Punkte (Änderungen der Schaltstruktur) führten zwar nicht zu Unstetigkeiten, aber doch zur Nichtdifferenzierbarkeit des Homotopieliftings mit teilweise polartigem Charakter!

Man beachte auch, daß allein auf dem Intervall $[1.98, 1.99]$ die Schaltstruktur zweimal wechselt, begleitet von drastischen Änderungen der adjungierten Variablen!

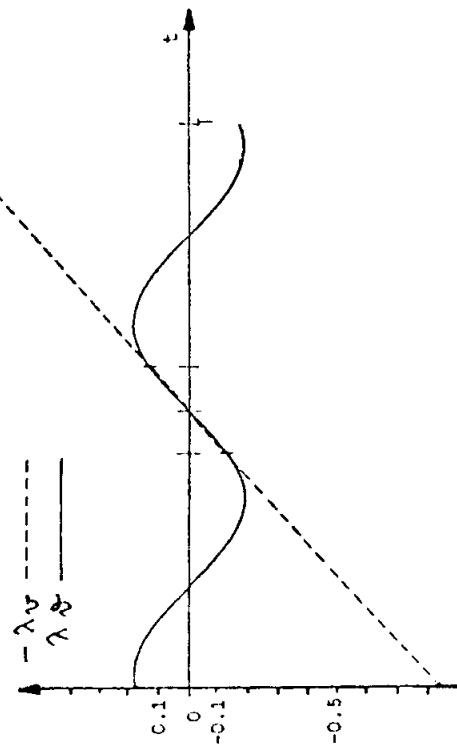
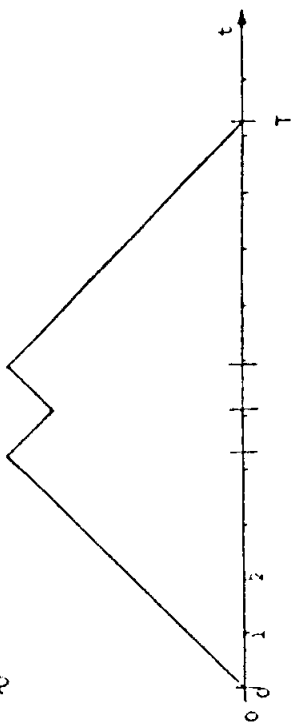
Greifer

15c)



LAUFMOTZE v

15a)



15b)

Fig. 15 unbeschränkte Lösung ($v_m^{\text{frei}} = 4.32996$, $T = 10.2496$)

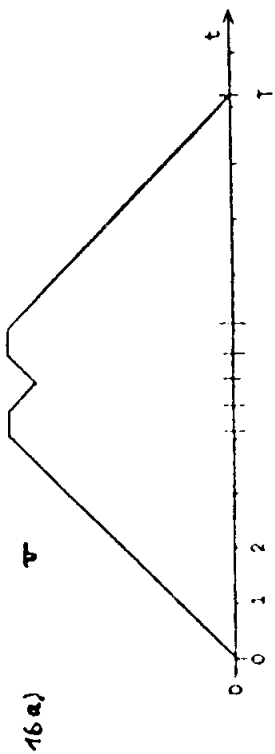


Fig. 16: $V_m = 4.1$ ($T = 10.2544$)

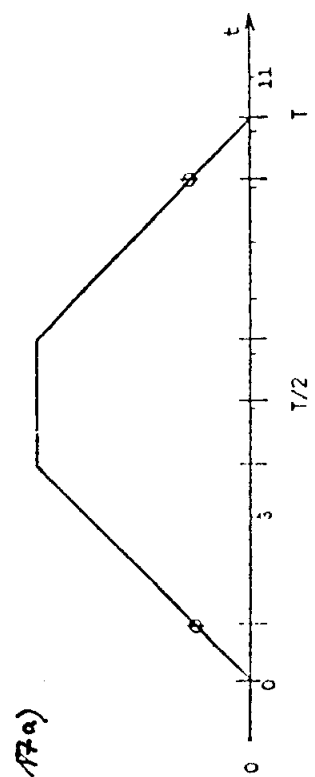
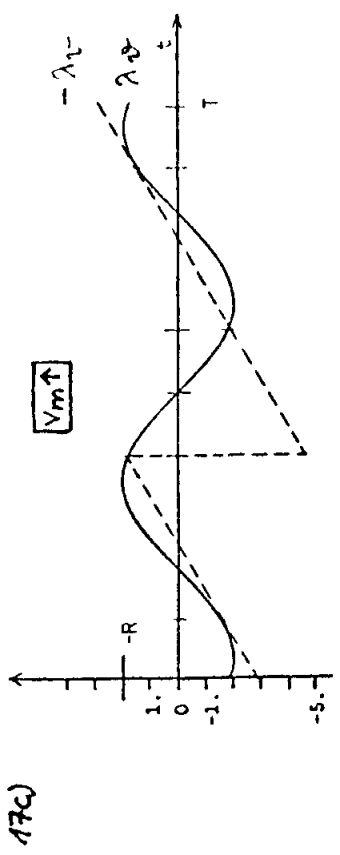
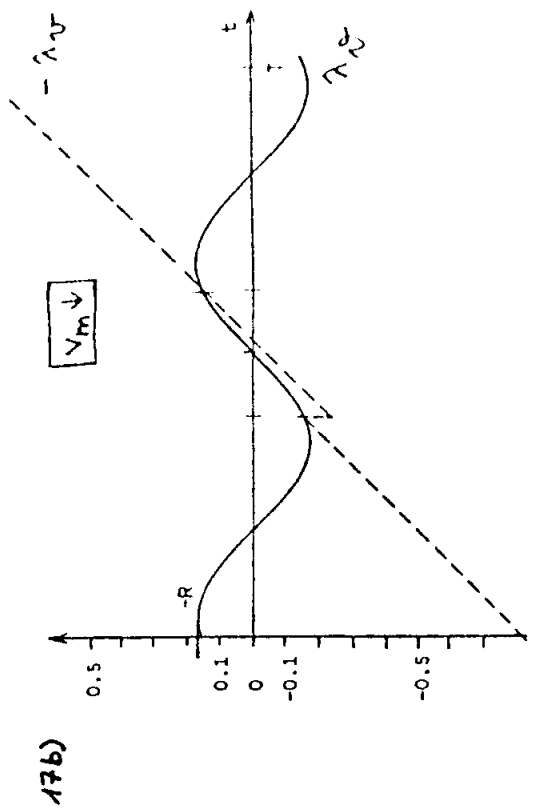
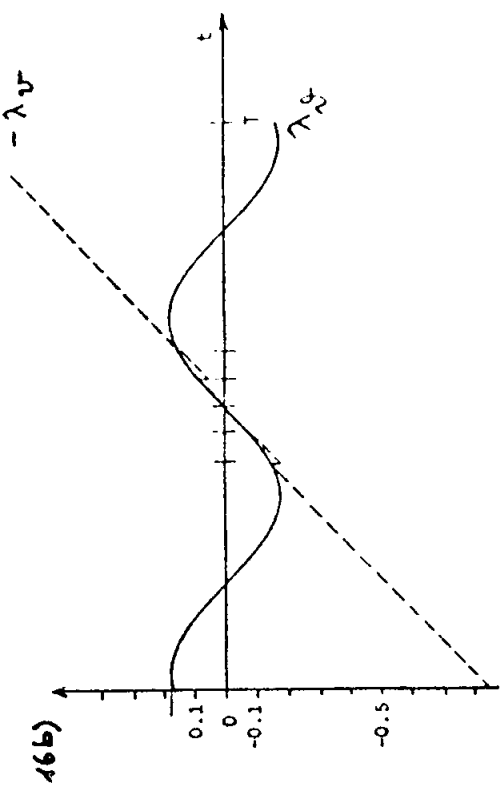


Fig. 17: $V_m = 3.97887$ ($T = 10.2621$)

singular ($V_m = E/2\pi$)



18a)

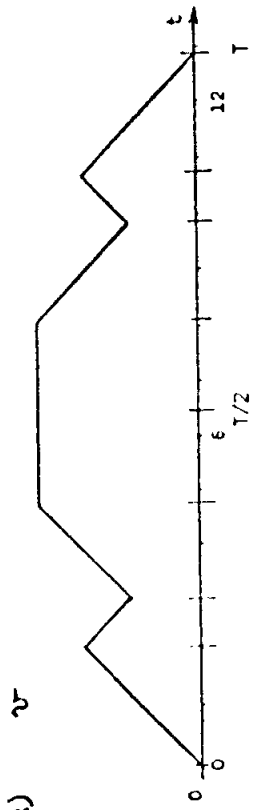


Fig. 18: $V_m = 3.0$ ($T = 12.8433$)

19a)

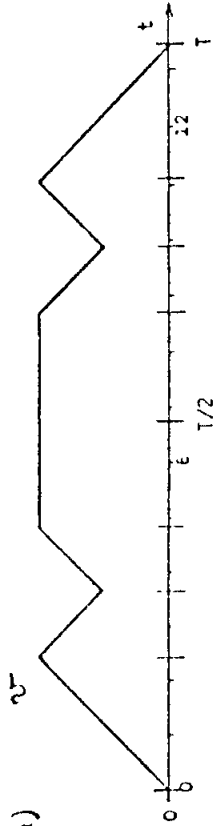


Fig. 19: $V_m = 2.49461$
Singular ($T = 13.6349$)

20a)

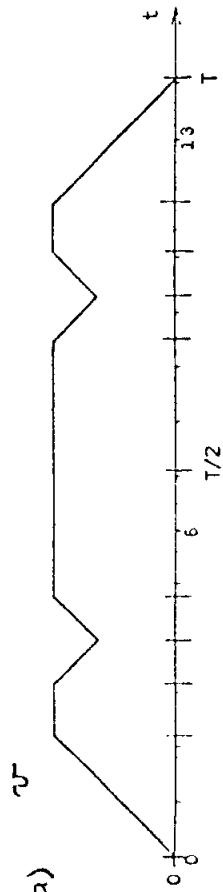
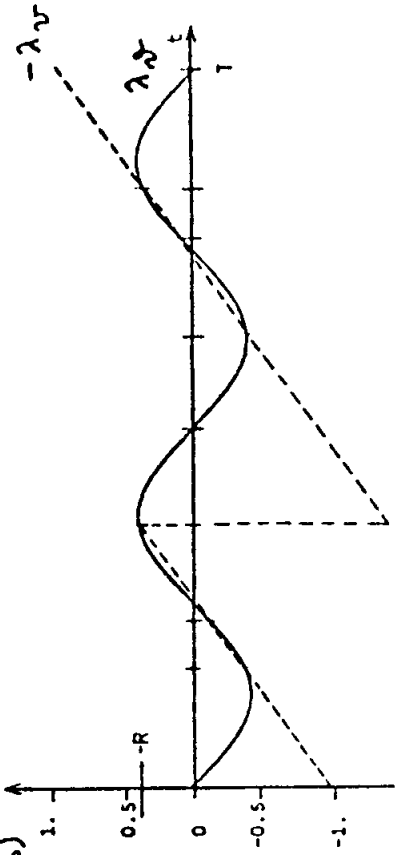
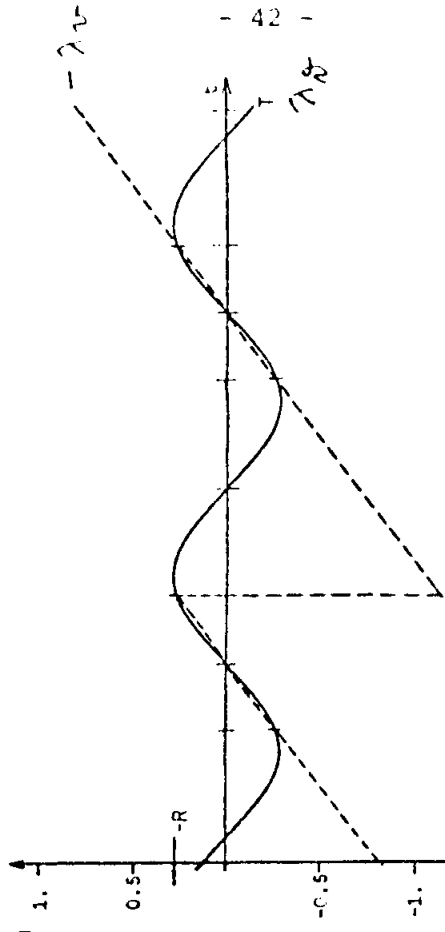


Fig. 20: $V_m = 2.2$ ($T = 14.1116$)

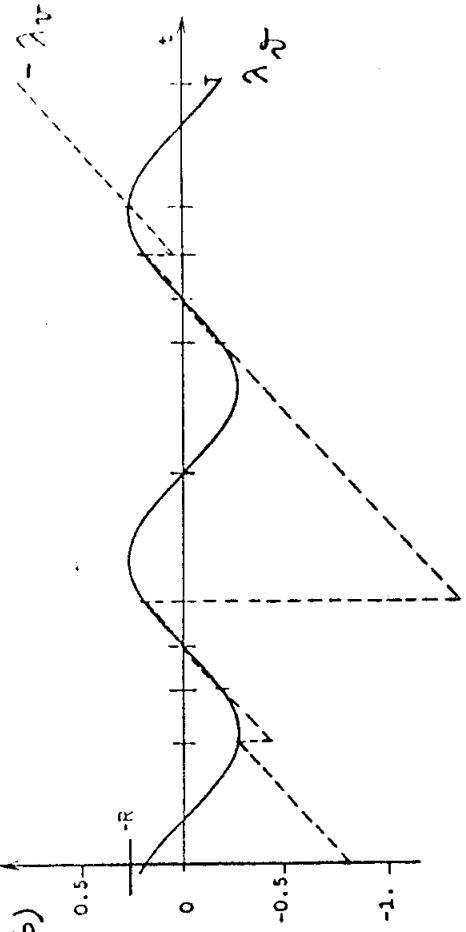
18b)



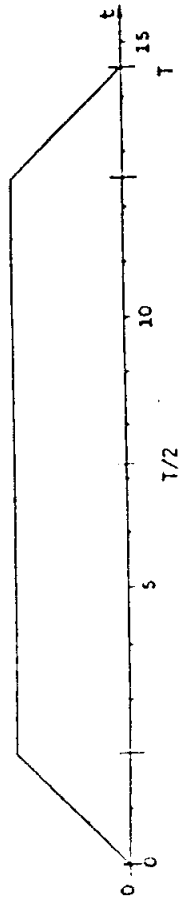
19b)



20b)



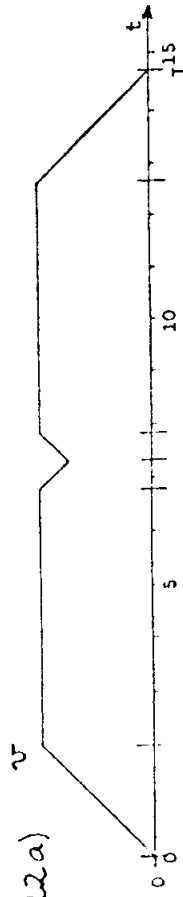
21a)



($T = 14.5558$)

Fig. 21: $V_m = 1.98944$
singular ($V_m = E / 4\pi$)

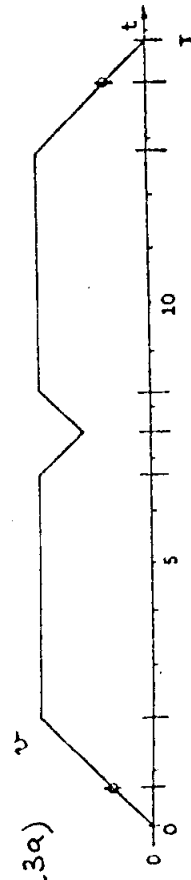
22a)



($T = 14.7098$)

Fig. 22: $V_m = 1.986$

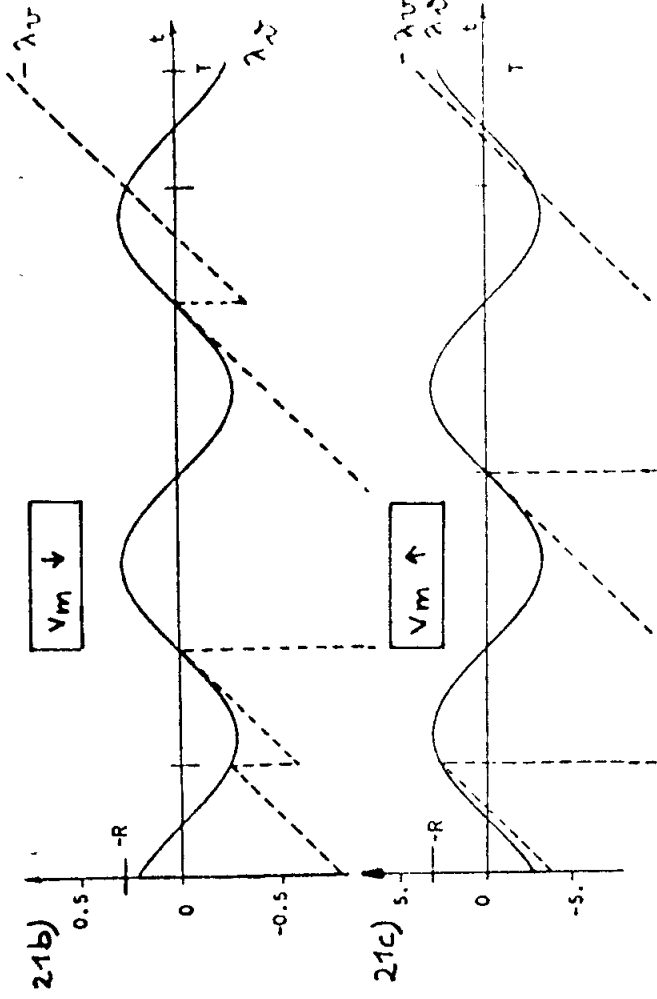
23a)



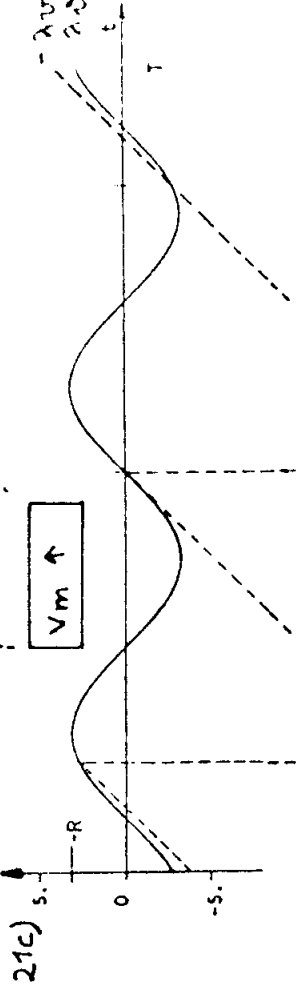
($T = 14.8523$)

Fig. 23: $V_m = 1.98364$
singular

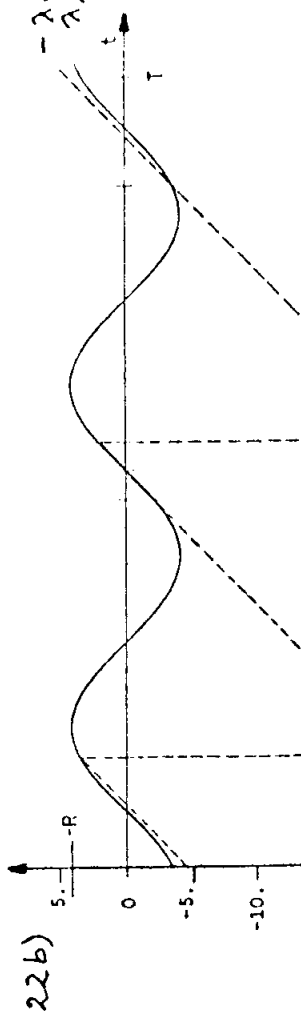
21b)



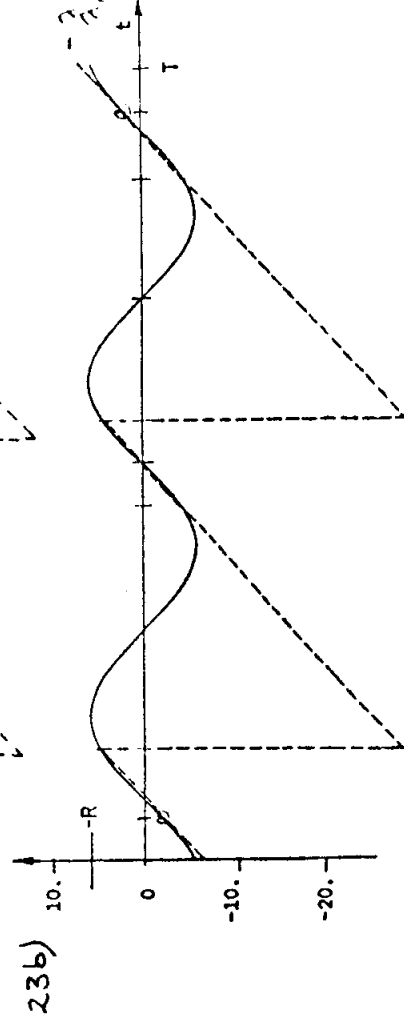
21c)



22b)



23b)



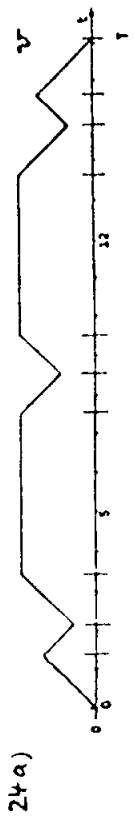


Fig. 24: $V_m = 1.85$ (T = 17.2130)

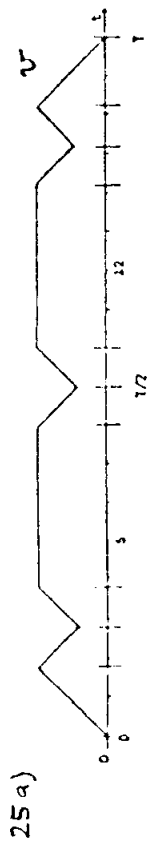


Fig. 25: $V_m = 1.72295$ (T = 18.0622)

Singular

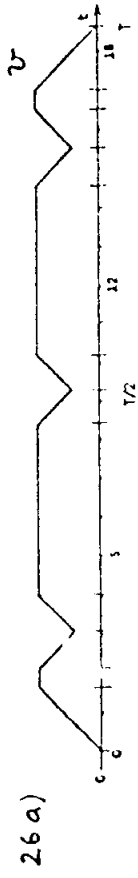


Fig. 26: $V_m = 1.6$ (T = 18.6969)

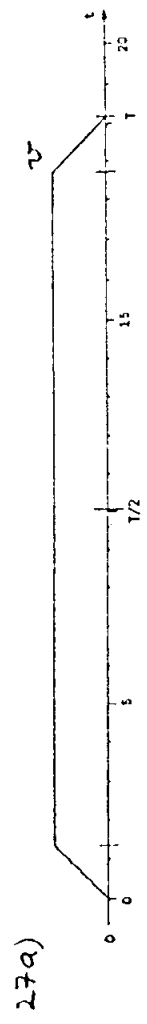
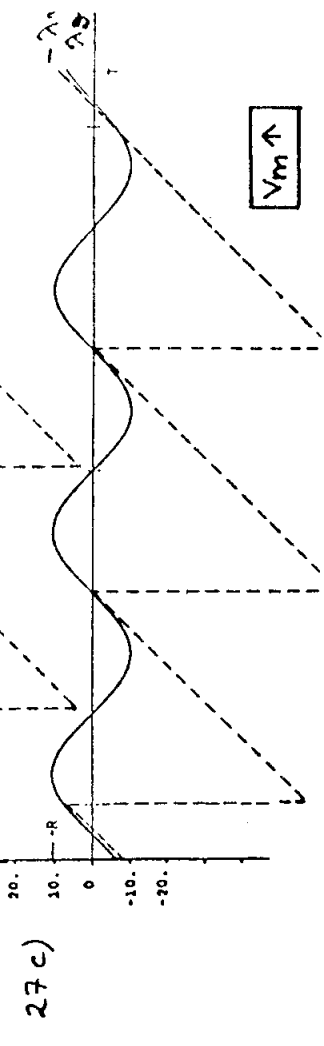
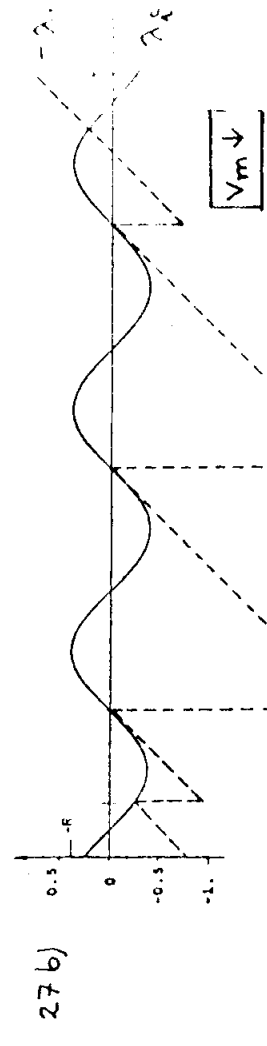
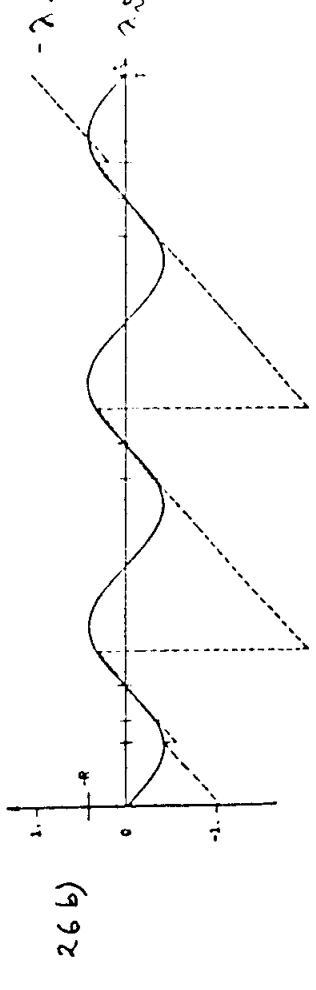
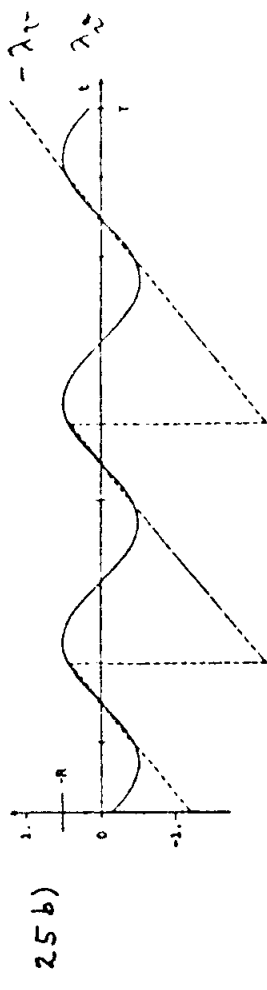
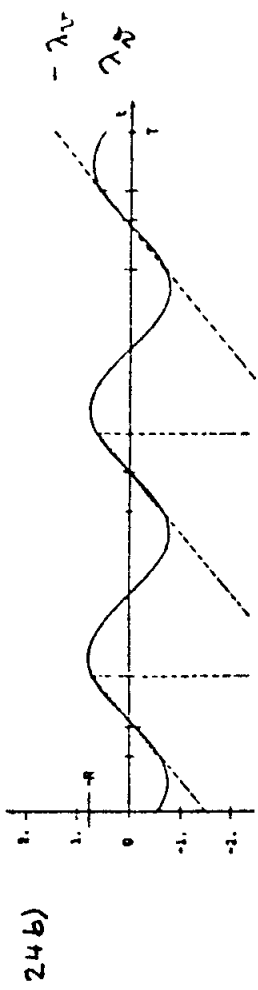


Fig. 27: $V_m = 13.2629$ (T = 20.1758)

Singular ($V_m = E/6\pi$)



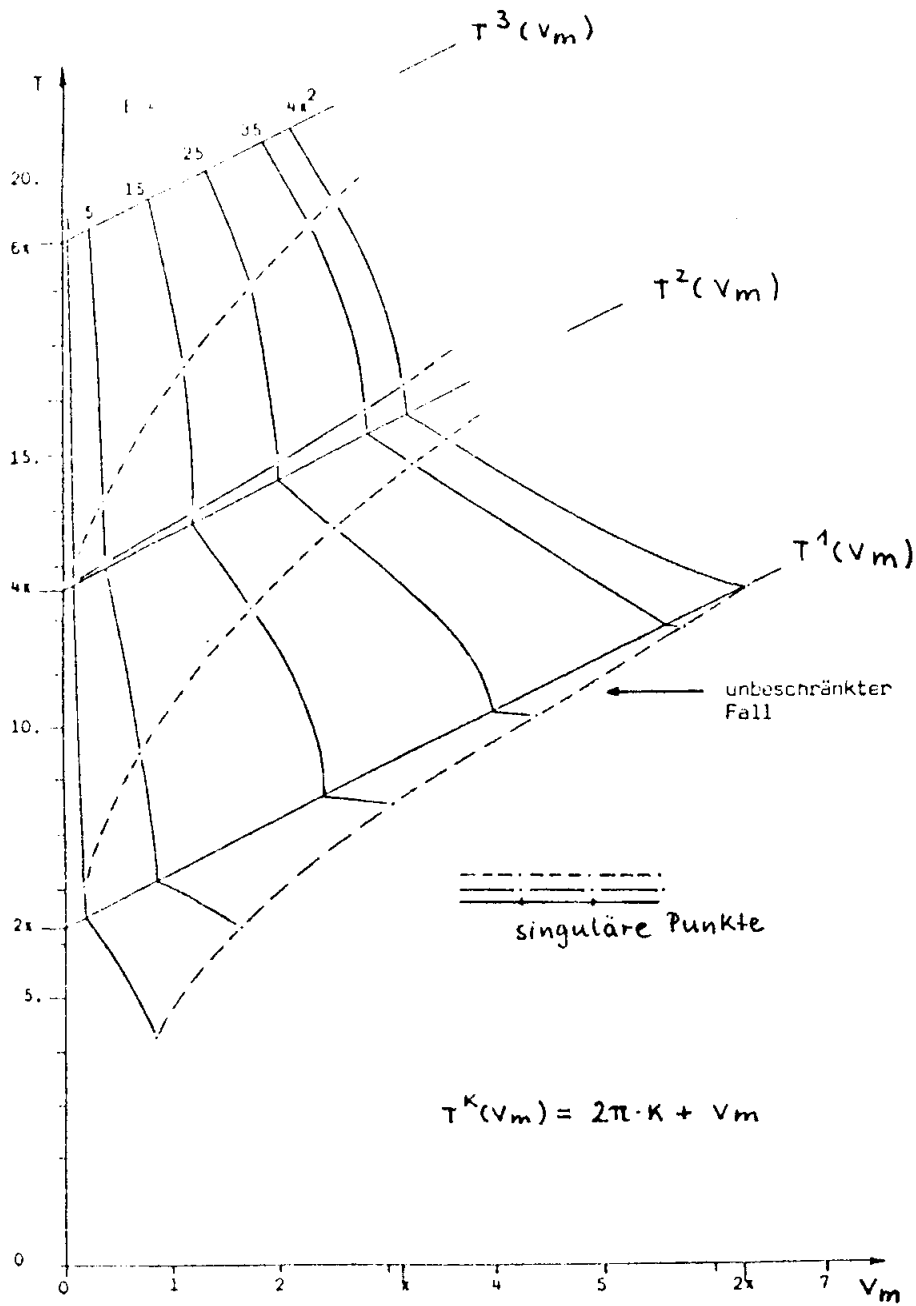


Fig. 28: optimale Endzeit $T(E, v_m)$

6.3 Aufheizungsminimierung bei der Rückführung einer Apollo-Kapsel bei einer Wiederaufstiegshöhenbegrenzung

Der Wiedereintritt eines Raumfahrzeuges vom Apollo-Typ in die Erdatmosphäre ist so zu steuern, daß die gesamte Aufheizung $q(T)$ minimiert wird.

Aus Sicherheitsgründen möchte man ferner den Wiederaufstieg der Kapsel nach dem ersten Eintauchen in die Atmosphäre - bewirkt durch die Auftriebskräfte - möglichst klein halten. Dies wird durch eine Begrenzung der Flughöhe auf diesem Teil der Trajektorie berücksichtigt.

Die Bewegung der Apollo-Kapsel genügt den Differentialgleichungen

$$(128) \quad \dot{v} = f_v(v, h, \gamma, u) = -F \cdot \rho(h) \cdot v^2 \cdot c_w(u) - g \cdot \sin \gamma \left(\frac{R}{R+h} \right)^2$$

(Tangentialgeschwindigkeit)

$$\dot{h} = f_h(v, \gamma) = v \cdot \sin \gamma$$

(Höhe über der Erdoberfläche)

$$\dot{\gamma} = f_\gamma(v, h, \gamma, u) = F \cdot \rho(h) \cdot v \cdot c_A(u) - \frac{g \cdot \cos \gamma}{v} \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 + \frac{v \cdot \cos \gamma}{R+h}$$

(Bahnneigungswinkel)

$$\dot{d} = f_d(v, h, \gamma) = v \cdot \cos \gamma \cdot \frac{R}{R+h}$$

(Distanz auf der Erdoberfläche)

$$\dot{q} = f_q(v, h) = 10 \cdot v^3 \rho(h)^{\frac{1}{2}}$$

(Aufheizung)

Hierbei sind

$$\rho(h) = \rho_0 \cdot \exp(-\beta \cdot h) \quad \text{(Luftdichte)}$$

$$c_w(u) = 0.88 + 0.52 \cos u \quad \text{(Widerstandsbeiwert)}$$

$$c_A(u) = -0.505 \sin u \quad \text{(Auftriebsbeiwert)}$$

Die Steuerung des Raumfahrzeuges erfolgt ausschließlich durch die Größe u (Anstellwinkel), die Widerstands- und Auftriebsbeiwert beeinflusst.

Die Konstanten in diesem Modell haben die Werte

$$\rho_0 = 0.23769_{-2}, \quad \beta = 1./0.235, \quad R = 209.0352,$$

$$F = S/2m = 25000, \quad g = 0.32172_{-3} \quad (\text{in } 10^5 \text{ feet, sec})$$

Zu erfüllen sind die 9 Randbedingungen

$$(129) \quad v(0) = 0,35 \quad , \quad h(0) = 4. \quad , \quad \gamma(0) = - 5,75 \frac{\pi}{180} \quad , \quad d(0) = 0. \quad , \quad q(0) = 0.$$

$$v(T) = 0,01239929 \quad , \quad h(T) = 0,75553 \quad , \quad \gamma(T) = - 26,237124 \frac{\pi}{180} \quad , \quad d(T) = 51,10198$$

Der Endzustand beschreibt die Ausgangsbedingungen für das Landemanöver. Die Endzeit T ist frei.

Wir behandeln zunächst dieses unbeschränkte Steuerungsproblem. Die Hamiltonfunktion ist

$$(130) \quad H = \lambda_q \cdot f_q + \lambda_v \cdot f_v + \lambda_h \cdot f_h + \lambda_\gamma \cdot f_\gamma + \lambda_d \cdot f_d$$

die adjungierten Differentialgleichungen

$$(131) \quad \dot{\lambda}_q = - \frac{\partial}{\partial q} H = 0 \quad , \quad \dot{\lambda}_d = - \frac{\partial}{\partial d} H = 0$$

$$\dot{\lambda}_v = - \frac{\partial}{\partial v} H \quad , \quad \dot{\lambda}_h = - \frac{\partial}{\partial h} H \quad , \quad \dot{\lambda}_\gamma = - \frac{\partial}{\partial \gamma} H$$

zeigen die Konstanz von λ_q und λ_d , die Differentialgleichungen für die übrigen adjungierten Variablen sind wesentlich komplizierter (vergl. Beispiel (6.1),

(101)). Die Transversalitätsbedingungen liefern

$$(132) \quad \lambda_q(T) = - 1 \quad \text{also} \quad \lambda_q(t) \equiv - 1 \quad , \quad t \in [0, T] \quad \text{mit (131)}$$

$$H(T) = 0$$

Fassen wir die Terme in H zusammen, die die Steuerung u enthalten

$$H = F \cdot \rho(h) \cdot v \left[- \lambda_v \cdot v \cdot 0,52 \cos u - \lambda_\gamma \cdot 0,505 \sin u \right] + \dots$$

liefert das Maximumprinzip sofort eine Vorschrift für die optimale Steuerung

$$(133) \quad \begin{aligned} \sin u^{\text{frei}} &:= - 0,505 \lambda_\gamma \cdot \frac{1}{w} \\ \cos u^{\text{frei}} &:= - 0,52 \cdot \lambda_v \cdot v \cdot \frac{1}{w} \end{aligned} \quad ; \quad w = \left((0,505 \lambda_\gamma)^2 + (0,52 \cdot v \cdot \lambda_v)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Damit erhalten wir insgesamt ein vollständiges Randwertproblem mit 11 Differentialgleichungen für Zustands- und adjungierte Variable und die Endzeit T (nach (55)) und 11 Randbedingungen zur Berechnung der unbeschränkten Lösung.

Der Höhenverlauf der so berechneten optimalen Flugbahn ist in Fig. 29 (aus [13]) dargestellt.

Der Wiederaufstieg der Kapsel nach t' soll nun durch die zusätzliche Zustandsbeschränkung

$$(134) \quad g^{(0)}(h) = h - h_m \leq 0 \quad \text{auf } [t', T]$$

begrenzt werden. Dies ist eine Beschränkung der Ordnung $q = 2$ mit

$$(135) \quad g^{(1)}(v, \gamma) = v \cdot \sin \gamma$$

$$g^{(2)}(v, h, \gamma; u) = F \cdot \rho(h) \cdot v^2 (c_A(u) \cdot \cos \gamma - c_W(u) \cdot \sin \gamma) - g \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 + \frac{v^2 \cos^2 \gamma}{R+h}$$

Für die unbeschränkte Lösung gilt

$$h_m^{\text{frei}} = \max_{t \in [t', T]} h^{\text{frei}}(t) = 2.10102$$

Das Wiederaufstiegshöhenmaximum wird bei $\hat{t} = 0.506413 \cdot T$, $T = 399.029$ sec angenommen, die Gesamtaufheizung ist $q(T) = 0.0164138$. Im Maximum gelten

$$(136) \quad g^{(1)}(\hat{t}) = 0, \quad g^{(2)}(\hat{t}) = -0.1077$$

Die unbeschränkte Lösung kann also als Berührungspunkt für $h_m = h_m^{\text{frei}}$ interpretiert werden, denn sie erfüllt die Anschlußbedingungen (41) hierfür. Sie läßt sich aber nicht als Grenzfall eines Randbogens (der Länge 0) auffassen, denn für diesen müßte auch $g^{(2)}(\hat{t}) = 0$ sein! (damit $u^{\text{frei}}(\hat{t}) = u^{\text{rand}}(\hat{t})$ nach (36, 37))

Bei einer Verschärfung der Zustandsbeschränkung in einer Homotopie erwarten wir deshalb zunächst einen Berührungspunkt. Zu seiner Berechnung nach (3.2), (63-66) ergänzen wir das "unbeschränkte" Randwertproblem deshalb um die Variablen t^b , v_o und fordern als zusätzliche Punktbedingungen

$$(137) \quad g^{(0)}(t^b) = 0, \quad g^{(1)}(t^b) = 0$$

Der Berührungspunkt wird mit einem Zeitschalter bestimmt

$$(138) \quad Q_L = t - t^b$$

im Schaltpunkt ist die Sprungbedingung

$$(139) \quad \lambda_h(t^{b+}) = \lambda_h(t^{b-}) + v_o \cdot \frac{\partial}{\partial h} g^{(0)} = \lambda_h(t^{b-}) + v_o$$

zu erfüllen, alle anderen adjungierten Variablen sind stetig, da andere Zustandsvariablen in $g^{(0)}$ nicht auftreten.

Mit diesem Algorithmus wurden in [13] Berührungslösungen für das Intervall

$$(140) \quad 0.00722 \cdot R \leq h_m \leq 2.10102 = 0.01005105 \cdot R$$

berechnet. Die Punktbedingungen (137) wurden dabei mit der Transformations-technik (70-72) behandelt. Der Höhenverlauf für $h_m = 1.78930$ und $h_m = 1.58571$ ist in Fig. 29 eingezeichnet.

Unterhalb dieses Wertes geht der Berührungspunkt schließlich in einen Randbogen über. Durch Auflösung von (135b) nach u erhalten wir für die optimale Steuerung auf dem Rand ((14), (15))

$$(141) \quad \sin u^{\text{rand}} := \frac{1}{0.505 \cdot F \cdot \rho(h)} \left(\frac{1}{R+h} - \frac{g}{v^2} \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 \right)$$

$$\cos u^{\text{rand}} := - (1 - \sin^2 u^{\text{rand}})^{\frac{1}{2}}$$

Das Vorzeichen für $\cos u^{\text{rand}}$ ergibt sich aus der Stetigkeit der Steuerung (H regulär) und (133).

Auf dem Randbogen ändern sich die adjungierten Differentialgleichungen für λ_v , λ_h und λ_γ

$$(142) \quad H \rightarrow H - \mu(t) g^{(2)}(v, h, \gamma; u)$$

$$\dot{\lambda}_v = - \frac{\partial}{\partial v} H + \mu(t) \cdot \frac{\partial}{\partial v} g^{(2)}$$

$$\dot{\lambda}_h = - \frac{\partial}{\partial h} H + \mu(t) \frac{\partial}{\partial h} g^{(2)}$$

$$\dot{\lambda}_\gamma = - \frac{\partial}{\partial \gamma} H + \mu(t) \frac{\partial}{\partial \gamma} g^{(2)}$$

Für λ_q , λ_d ändert sich nichts, da q , d nicht in $g^{(2)}$ auftreten. Dabei ist $\mu(t) = 0$ auf freien Bögen, und

$$(143) \quad \mu(t) = \lambda' f_u \Big|_{g_u} (q) = \frac{1}{v} (\lambda_v \cdot v \frac{0.52}{0.505} \cdot \tan u^{\text{rand}} - \lambda_\gamma)$$

auf dem Randbogen, wenn man $g^{(1)} \equiv 0$ berücksichtigt.

Im Aufsprungpunkt t^1 müssen die 2 Anschlußbedingungen (57)

$$(144) \quad h(t^1) - h_m = 0, \quad v(t^1) \cdot \sin \gamma(t^1) = 0 \quad (\text{oder: } \gamma(t^1) = 0)$$

erfüllt werden, dafür kommen die 2 Variablen v_0, v_1 hinzu, die in den Sprungbedingungen auftreten (58)

$$(145) \quad \begin{aligned} \lambda_h(t^1+) &= \lambda_h(t^1-) + v_0 \\ \lambda_Y(t^1+) &= \lambda_Y(t^1-) + v_1 \cdot v(t^1) \cdot \underbrace{\cos \gamma(t^1)}_{= 1} \\ \lambda_v(t^1+) &= \lambda_v(t^1-) + v_1 \cdot \underbrace{\sin \gamma(t^1)}_{= 0} \end{aligned}$$

λ_v ist also stetig, ebenso λ_q und λ_d , da q und d in $g^{(0)}, g^{(1)}$ nicht auftreten.

Der Aufsprungpunkt wurde in [13], [16] mit einem Zeitschalter bestimmt

$$(146) \quad Q_1 = t - t^1$$

und die Stetigkeit der Hamiltonfunktion bzw.

$$(147) \quad u^{\text{frei}}(t^1) - u^{\text{rand}}(t^1) = 0$$

als zusätzliche Punktbedingung - für die neue Variable t^1 - gewählt. Der Aufsprungpunkt wurde nach (62a) über den Schalter

$$(148) \quad Q_2 = u^{\text{frei}}(t^2) - u^{\text{rand}}(t^2)$$

bestimmt.

Das unbeschränkte Randwertproblem wird damit auf ein MPRWP der Dimension 14 erweitert, mit den zusätzlichen Variablen v_0, v_1, t^1 und den Punktbedingungen (144, 148).

Durch die Behandlung der Punktbedingungen gemäß (70-72) kamen in [13,16] noch drei weitere Variablen hinzu.

Mit diesem Algorithmus wurden Lösungen mit einem Randbogen für das Intervall

$$(149) \quad 0.007139 \cdot R \leq h_m \leq 0.00719 \cdot R$$

berechnet. Die Homotopie wurde bei $h_m = 1.49230$ beendet. Der Höhenverlauf ist in Fig. 29 dargestellt.

Die Gesamtaufheizung für diese Lösung ist $q(T) = 0.0170664$, die Gesamtflugzeit beträgt 390.900 sec.

Während also das Wiederaufstiegshöhenmaximum um 29% von 210102 ft auf 149230 ft gesenkt wurde, verschlechtert sich die Gesamtaufheizung nur um 4%, bei einer Verkürzung der Flugzeit um 2%.

Interessant ist, daß optimale Lösungen im zwischen (140) und (149) verbleibenden Restintervall und der genaue Übergang vom Berührungspunkt zum Randbogen bisher nicht berechnet werden konnten! (vergl. hierzu auch die Untersuchungen in Seydel [22])

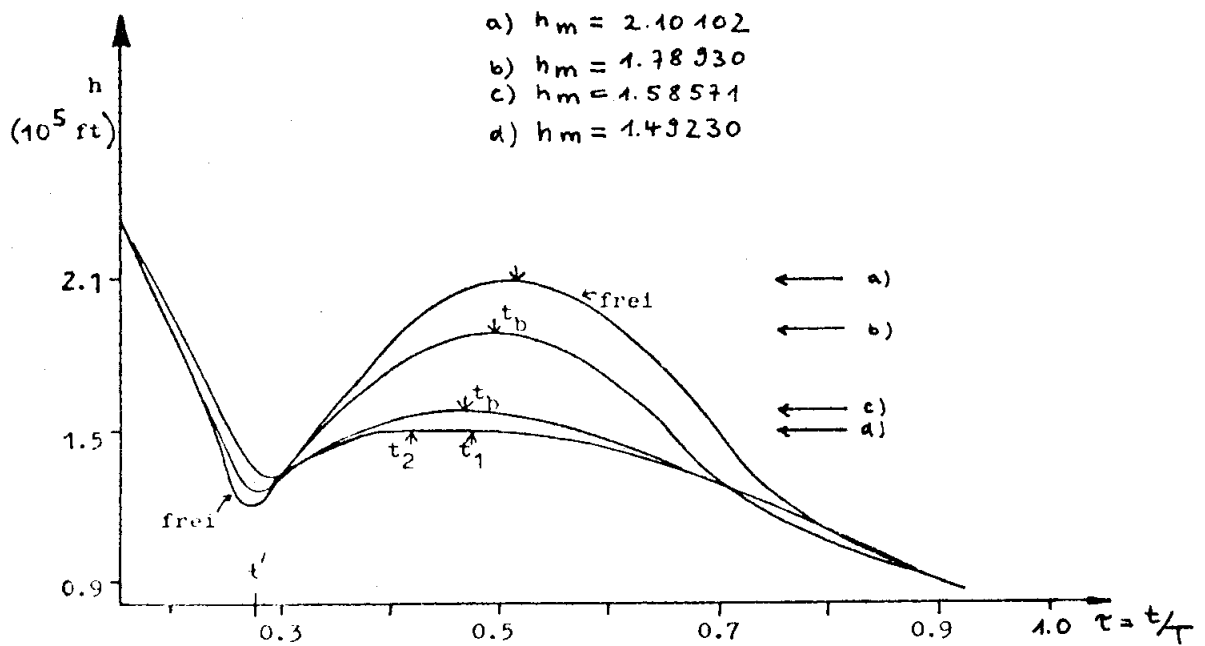


Fig. 29: Optimaler Höhenverlauf

7.1 Das Chebychef-Steuerungsproblem der "schärfsten Beschränkung"

In vielen praktischen Fällen wird man nicht nur an einer Lösung eines zustandsbeschränkten Problems für einen festen Wert ϵ , oder für mehrere Werte in einem Intervall $\epsilon_1 \leq \epsilon \leq \epsilon_r$, sondern auch daran interessiert sein, den minimal möglichen Wert des Parameters ϵ zu bestimmen, also nach der schärfsten möglichen Zustandsbeschränkung fragen.

Im folgenden soll kurz skizziert werden, wie man Lösungen eines solchen Chebychef- oder Minimax-Steuerungsproblems mit den Methoden der vergangenen Abschnitte berechnet (für eine ausführlichere Darstellung siehe [23]).

Notwendige Bedingungen

Faßt man den Parameter ϵ als zusätzliche Zustandsvariable x_{n+1} auf (nur formal, siehe auch Bulirsch [7], Abschnitt 1.1.2), so entspricht das obige Problem gerade dem allgemeinen Chebychef-Steuerungsproblem (mit $\gamma = 0$, und $\delta > 0$ beliebig!)

$$\begin{aligned}
(150) \quad & \delta \cdot x_{n+1}(T) + [\gamma \cdot \phi(T, x(T))] = \min! \quad (\Leftrightarrow x_{n+1} = \min!) \\
& \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\
& \dot{x}_{n+1}(t) = 0 \\
& x(0) = x_0, \quad r(T, x(T)) = 0
\end{aligned}$$

mit der Zustandsbeschränkung

$$(151) \quad g(x(t), u(t)) - x_{n+1} \leq 0$$

Auf dieses sind aber - Kenntnis der Struktur der Lösung vorausgesetzt - unmittelbar die Sätze des Abschnitts 2 über notwendige Bedingungen anwendbar!

Man erhält eine zusätzliche adjungierte Variable λ_{n+1} zu x_{n+1} , die der Differentialgleichung

$$(152) \quad \dot{\lambda}_{n+1}(t) = \begin{cases} -\mu(t) & : \text{ auf Randbögen und falls } q = 0 (!) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

genügt und (für $q \geq 1$) die Sprungbedingungen in Berühr- und Aufsprungpunkten t_i

$$(153) \quad \lambda_{n+1}(t_i^+) - \lambda_{n+1}(t_i^-) = v_i^0$$

erfüllt. Außerdem gelten die Transversalitätsbedingungen

$$(154) \quad \lambda_{n+1}(T) = -\delta,$$

(und $\lambda(T) = [-\gamma \phi_x(T, x(T))] - \alpha^T r_x(T, x(T))$) und, da für x_{n+1} keine Anfangsbedingung gegeben ist, zusätzlich

$$(155) \quad \lambda_{n+1}(0) = 0.$$

Man beachte, daß die Bedingungen (152 - 155) zusammen mit dem freien Parameter x_{n+1} gerade wieder auf ein vollständiges Mehrpunktrandwertproblem führen.

Im Falle $q \geq 1$ läßt sich dabei die Integration von λ_{n+1} einsparen, (152 - 155) führen dann auf die einfache Randbedingung

$$(156) \quad \sum v_i^0 = \delta \quad (\text{über alle Berühr- und Aufsprungpunkte } t_i)$$

welche (formal) den freien Parameter x_{n+1} festlegt.

Schließlich sei noch einmal ausdrücklich betont, daß auch die in Satz 2 angegebenen Vorzeichenbedingungen gelten müssen - andernfalls ist die Lösung falsch!

Numerische Lösung mittels Homotopien

In manchen praktischen Fällen läßt sich die Struktur der Lösung des Minimax-Problems (150,151) a-priori bestimmen (siehe z.B. [23]), dann kann gemäß Abschnitt 3 ein Mehrpunktrandwertproblem formuliert und damit unmittelbar eine Lösung berechnet werden.

Im allgemeinen ist jedoch die Durchführung einer Homotopie zu empfehlen. Man sieht unmittelbar, daß der in 5.1 beschriebene Homotopieansatz "in ϵ " so nicht mehr angewandt werden kann: das "unbeschränkte" Optimierungsproblem (150) - ohne die Zustandsbeschränkung (151) - ist sinnlos, es besitzt keine Lösung!

Als besonders günstige Alternative erweist sich eine Homotopie des Zielfunktional, die im folgenden dargestellt wird. Diese bietet unter anderem den Vorteil, daß man auf sie im typischen Fall der Beispiele aus Abschnitt 6 - wo

ein "normales" Zielfunktional ϕ und eine sukzessiv verschärfte Zustandsbeschränkung vorliegen - jederzeit von einer Homotopie in ϵ "umsteigen" kann.

Den theoretischen Hintergrund hierzu liefert der folgende Satz:

Satz 5: (Dualität von zustandsbeschränkten und Chebychef-Steuerungsproblemen)

Seien u_ϵ, x_ϵ eine stationäre Lösung des zustandsbeschränkten Steuerungsproblems (1-5) (für ein festes ϵ), und $\lambda(t), \alpha, \mu(t), v_j^i$ die zugehörigen adjungierten Variablen.

Definiert man nun $x_{n+1}(t) := \epsilon, \lambda_{n+1}(t)$ durch (152), (153) und (155) und setzt $\delta := -\lambda_{n+1}(T)$ sowie $\gamma := 1$, dann sind u_ϵ, x_ϵ und x_{n+1} eine stationäre Lösung des Chebychef-Steuerungsproblems (150-151), und $\lambda, \alpha, \lambda_{n+1}, \mu, v_j^i$ sind die zugehörigen adjungierten Variablen.

Satz 5 läßt sich auch umkehren und weist damit die Dualität der beiden Steuerungsprobleme nach.

Mit diesen Vorbereitungen läßt sich nun eine Chebychef-Lösung mit "schärfster Zustandsbeschränkung" über eine Zielfunktionalshomotopie berechnen, die man von $\gamma = 1$ nach $\gamma = 0$ führt (δ fest). Man beachte, daß diese Homotopie zwar formal äquivalent zur Homotopie (5.1) ist, die aus dem Grenzprozeß $\delta \rightarrow \infty$ (γ fest) erhalten werden kann.

Die vorgenommene Umparametrisierung bewirkt aber, daß die adjungierten Variablen (λ, μ, v) - anders als im ursprünglichen Fall - beschränkt bleiben!

Bei zustandsbeschränkten Problemen kann es deshalb auch dann, wenn man am Chebychef-Grenzfall selbst nicht interessiert ist, numerisch günstig sein, von vornherein eine Homotopie über das Zielfunktional durchzuführen. Dieses setzt man dabei als

$$(158) \quad \delta \cdot x_{n+1}(T) + (1 - \delta) \cdot \phi(T, x(T)) = \min !$$

an und führt die Homotopie von $\delta = 0$ (unbeschränktes Problem) bis maximal $\delta = 1$ (Chebychef-Problem). Der Homotopieparameter δ tritt dabei nur in den

Transversalitätsbedingungen auf, man hat eine Randwerthomotopie!

Reine Chebychef-Steuerungsprobleme

Häufig treten Chebychef-Probleme nicht als Grenzfall von Zustandsbeschränkungen auf, sondern direkt durch Zielfunktionale der Form

$$(159) \quad \max_{\substack{i=1, \dots, p \\ t \in [0, T]}} g_i(x(t)[, u(t)]) = \min ! ,$$

welche der Klasse der hier behandelten Probleme auch den Namen "Minimax"-Steuerungsprobleme gegeben haben. Man sieht sofort, daß diese Probleme äquivalent sind zu

$$(160) \quad x_{n+1} = \min !$$

mit den zusätzlichen Nebenbedingungen

$$(161) \quad g_i(x(t)[, u(t)]) - x_{n+1} \leq 0 .$$

Analog zu zustandsbeschränkten Steuerungsproblemen ist es hier stets möglich, ein Hilfszielfunktional zur Durchführung einer Homotopie zu wählen, was aber möglichst unter Berücksichtigung des physikalischen Hintergrunds des Problems geschehen sollte (z.B. Reichweite bei der Space-Shuttle, Energieverbrauch etc.).

Ein typisches Beispiel hierfür sind Regelungsprobleme, bei denen eine Sollgröße einzuhalten ist

$$(162) \quad \max_{[0, T]} |g(x(t)[, u(t)]) - g_{\text{soll}}(t)| = \min !$$

Als Hilfszielfunktional kann man dann das einfachere "least squares"-Regelproblem

$$(163) \quad \int_0^T (g(x(t)[, u(t)]) - g_{\text{soll}}(t))^2 dt = \min !$$

oder ein Funktional des "minimalen Aufwands"

$$(164) \quad \int_0^T u(t)^T Q u(t) dt = \min ! \quad , \quad Q \text{ positiv definit (z.B. I)}$$

wählen. Aufgrund seiner günstigen theoretischen Eigenschaften (Konvexität) eignet sich ein (Hilfs-)Zielfunktional vom Typ (164) grundsätzlich immer für Chebychef-Steuerungsprobleme!

Zur Existenz von Lösungen

Bei der Herleitung der notwendigen Bedingungen wurde angenommen, daß eine Chebychef-Lösung existiert. Dies ist aber keinesfalls immer so, wie das Erz-entladeproblem aus 6.1 zeigt - eine minimal mögliche Höchstgeschwindigkeit gibt es zu dieser Formulierung des Problems nicht.

Aber auch wenn eine Lösung existiert, muß sie keinesfalls eindeutig sein, z.B. dann, wenn der minimale Wert von x_{n+1} durch andere Steuerungs- oder Zustandsbeschränkungen oder Randbedingungen (schon vor dem Ende der Homotopie bei $\gamma = 0$) vollständig charakterisiert wird. In einem solchen Fall ist die Steuerung auf einem oder mehreren freien Bögen evtl. nicht bestimmt, das Problem ist **singulär!**

Der in diesem Abschnitt beschriebene Homotopicansatz hat aber den Vorteil, auch in diesem Fall noch anwendbar zu bleiben. Das (Hilfs-)Zielfunktional - z.B. (164) - bewirkt dann eine Optimierung der restlichen Freiheitsgrade. Dieses Verfahren läßt sich als Verallgemeinerung der Pseudoinversen bei singulären linearen Gleichungssystemen (siehe hierzu z.B. Deuffhard [8]) interpretieren!

7.2. Die aufheizungsminimale Lösung des Space - Shuttle - Wiedereintritts

Für die numerische Berechnung der aufheizungsminimalen Lösung wurde eine einfache Modifikation der in 7.1 beschriebenen Technik verwendet: wie man leicht zeigt, ist das Ausgangsproblem (1-5) auch äquivalent bzgl. strikter Minima (lokal und global!) zum Chebychef-Problem

$$(165) \quad \begin{aligned} x_{n+1}(T) &= \min! \\ g(x(t), u(t)) - x_{n+1} &\leq 0 \end{aligned}$$

mit der Zusatzrandbedingung

$$(166) \quad \phi(T, x(T)) \leq \phi_0 \quad ; \quad \phi_0 := \phi(T_\epsilon, x_\epsilon(T_\epsilon)).$$

Aufgrund dieser Einbettung kann man die Homotopie zum eigentlichen Chebychef-Problem auch durch sukzessive Abschwächung von (166), d.h. Vergrößerung von ϕ_0 , durchführen - also in einer Randwerthomotopie. Dieses Vorgehen bietet außer dem hübschen theoretischen Äquivalentresultat in diesem Falle auch numerische Vorteile.

Man beachte aber, daß der verfolgte Homotopieweg bei diesem Ansatz i.a. der gleiche ist wie bei der oben beschriebenen Zielfunktionalshomotopie, nur die Parametrisierung ist verschieden!

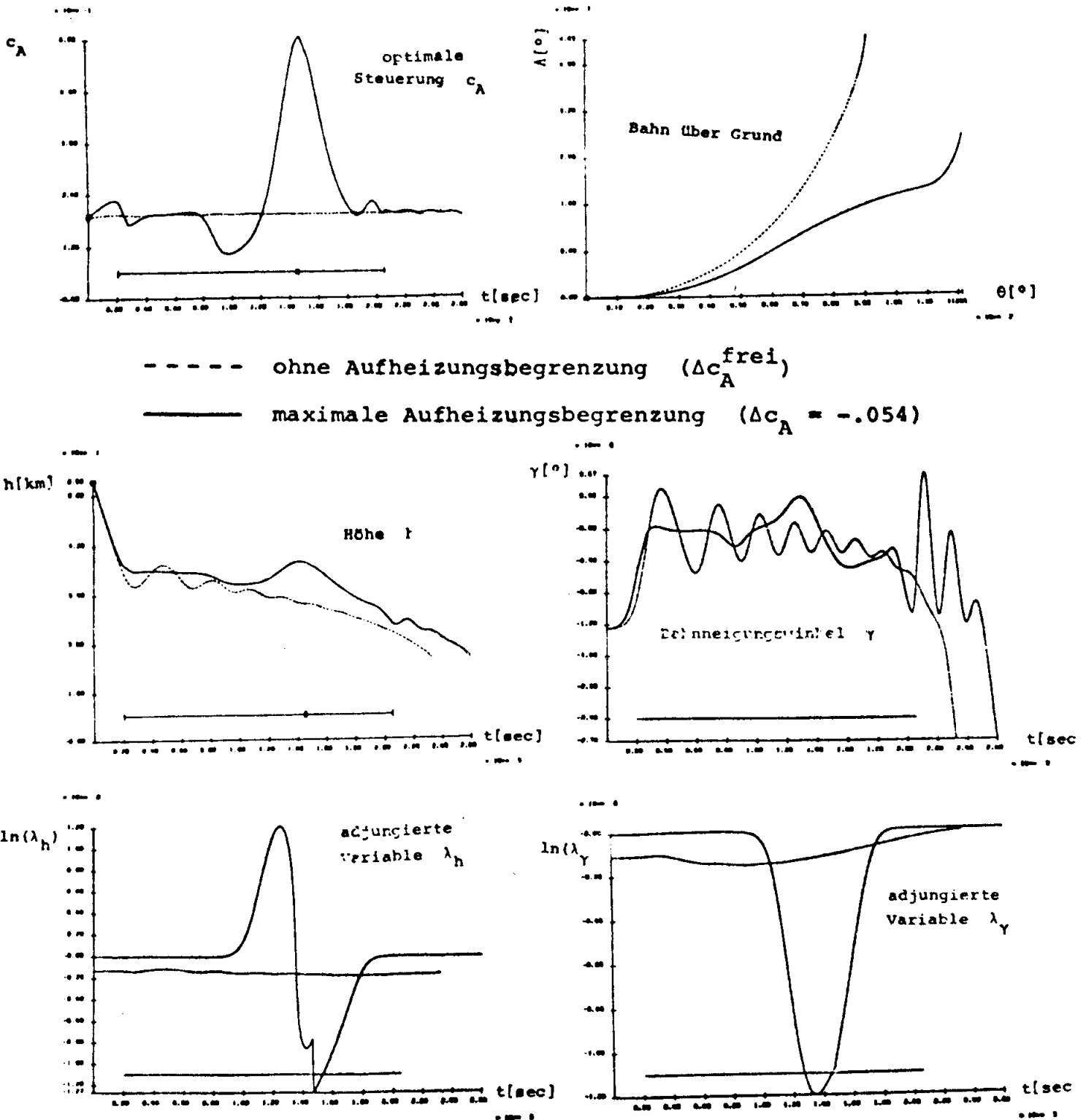
Natürlich sind auch die anzusetzenden MPRWP identisch (bis auf die Homotopiebedingung).

Bei der Space - Shuttle führt die Homotopie schließlich auf eine aufheizungsminimale Lösung mit einer Höchsttemperatur von nur 890°C bei einer seitlichen Reichweite von immerhin noch 26° , die der von den Ingenieuren geforderten Mindestreichweite (einschließlich eines Sicherheitsbereichs) entspricht. Die Aufheizung wurde also um weitere 27% gegenüber den Resultaten in 6.1 reduziert. Die Lösung weist zwei Randbögen auf, die durch die Beschränkung des Auftriebsbeiwertes auf maximal 0.6 bewirkt werden. Vernachlässigt man diese Beschränkung, ist sogar eine Temperaturreduktion auf unter 600°C möglich. Die aufheizungsminimalen Lösungsdaten sind zusammen mit der reichweitenoptimalen Lösung in Figur 30a)-f) dargestellt.

Man beachte vor allem, daß die seitliche Reichweite zu wesentlichen Teilen noch auf dem letzten freien Bogen durch starkes "Pumpen" erzielt wird. (Fig 30d)

Fig 30 Aufheizungsoptimale Projektorie

- a) optimale Steuerung c_A b) Bahn über Grund θ c) Höhe h
 d) Bahnneigungswinkel γ e) und f) adjungierte Variablen $\lambda_h, \lambda_\gamma$ (logarithmisch)



7.3 Zur Wiederaufstiegshöhenbegrenzung beim Apollo-Problem

Die in Abschnitt 6.3 nach Maurer-Gillessen [13] dargestellten Lösungen des wiederaufstiegshöhenbegrenzten Apollo Re-Entrys mit einem Randbogen erfüllen bei einer Überprüfung nicht die notwendigen Bedingungen des Satzes 2: die Vorzeichenbedingungen (26) für die Ableitungen des Multiplikators $\mu(t)$ sind verletzt!

Die korrekten Lösungen des Problems sind in Figur 31a) - f) angegeben. Neben dem ersten Berührpunkt t_1^b tritt ab $h_m = 1.5079520$ zunächst ein Nebenmaximum t_2' von $h(t)$ auf, welches bei $h_m = 1.5073335$ in einen zweiten Berührpunkt t_2^b übergeht. Bei $h_m = 1.4779951$ verschwindet auch die zweite Ableitung von $h(t)$ in t_2^b , so daß ein Übergang dieses Berührpunktes in einen Randbogen möglich wird, der von hier an - neben dem ursprünglichen Berührpunkt t_1^b (!) - auftritt. Die Homotopie wurde beendet bei $h_m = 1.3587289$, da hier das erste Höhenminimum \hat{t} , welches den Beginn der (lokal definierten) Zustandsbeschränkung charakterisiert, verschwindet und die Wiedereintrittskurve unmittelbar in den Randbogen übergeht.

Alle Lösungen dieses Abschnitts wurden mit den in Abschnitt 4 dargestellten Mehrpunkttrandwertansätzen berechnet, die "singulären Punkte" - ausnahmslos vom Typ I (84) - , in denen sich jeweils die Schaltstruktur ändert, wurden mit den Grenzfallalgorithmen nach 5.2 (bzw. [2]) bestimmt.

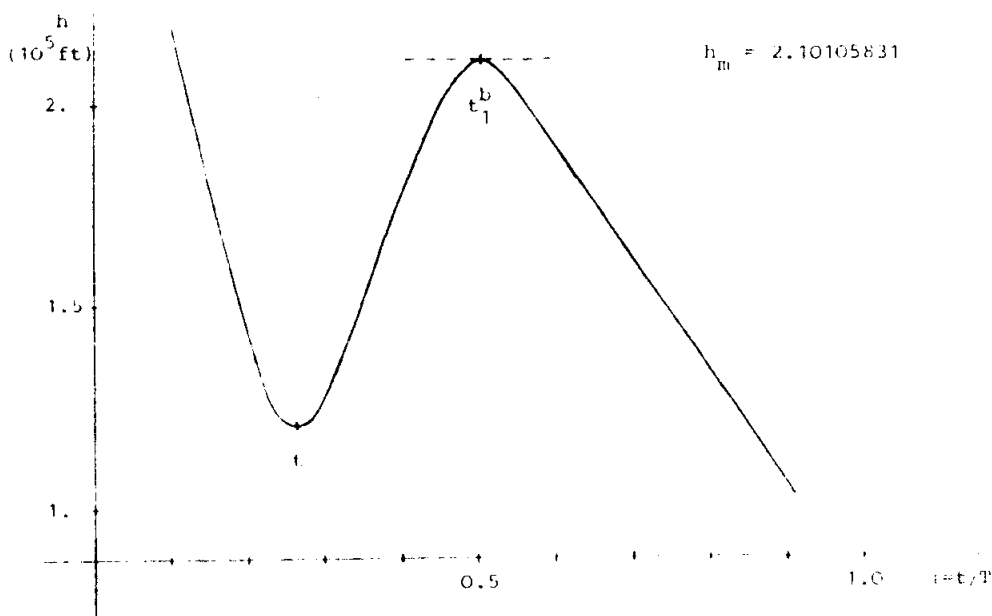


Fig. 31a: Unbeschränkter Fall

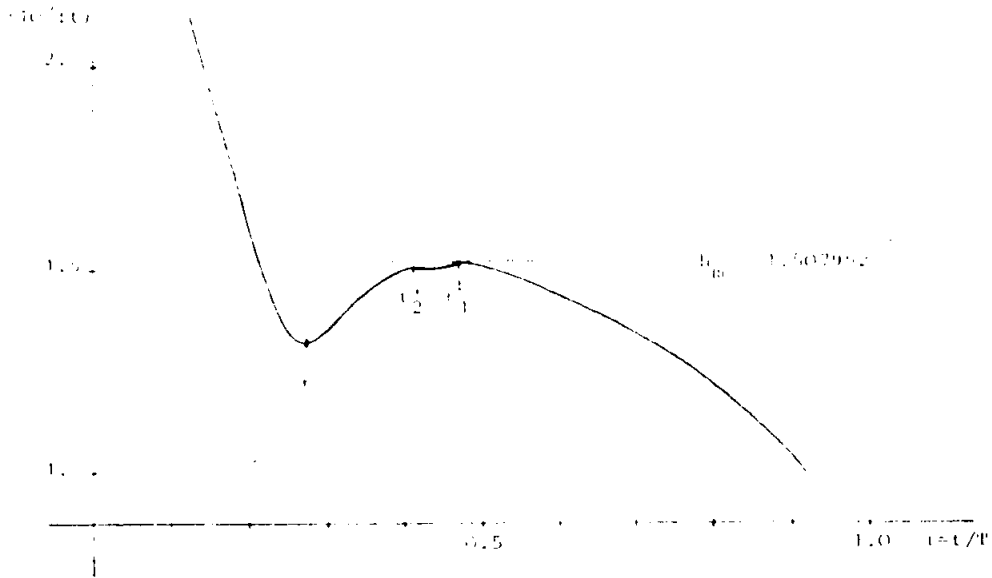


Fig. 31b: Auftreten eines Nebenmaximums ($\dot{h}(t_2) = 0$)

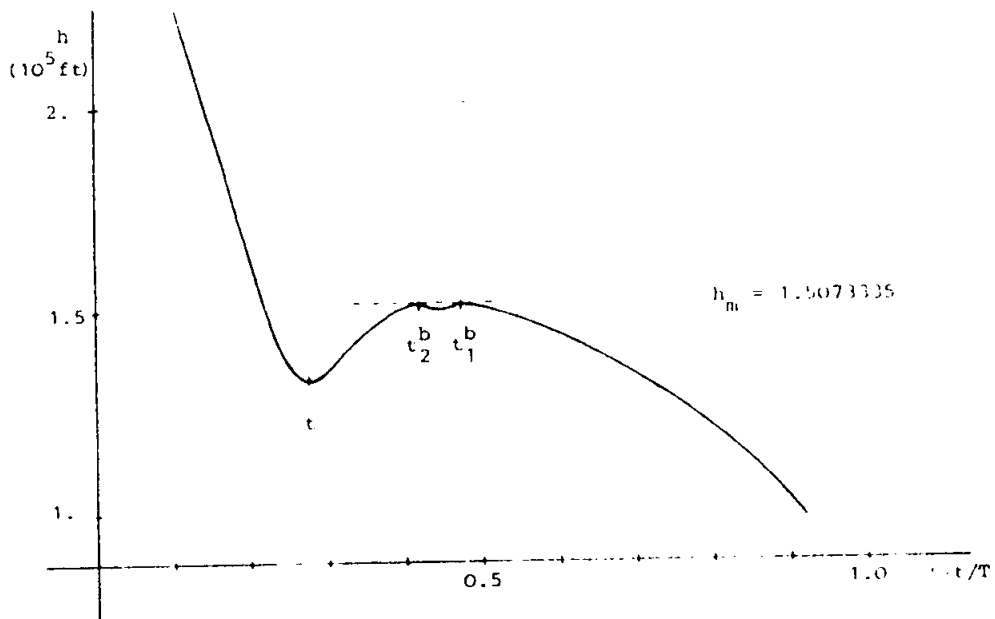


Fig. 31c: Nebenmaximum geht in 2. Berührungspunkt über ($\dot{h}(t_2) = h_m$)

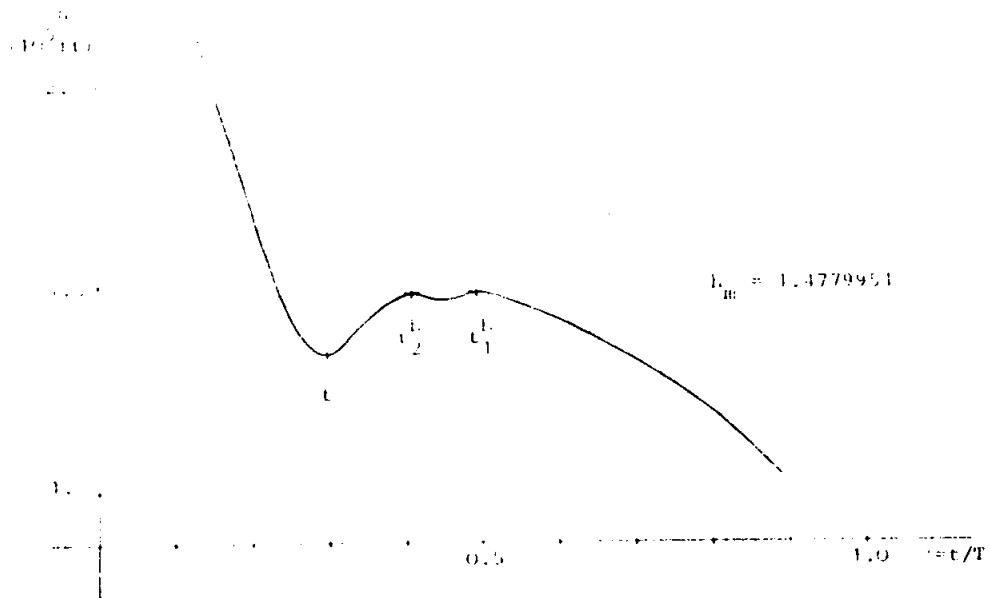


Fig. 31d: Erster Berührungspunkt geht in Randbogen über ($\dot{h}(t_2^b) = 0$)

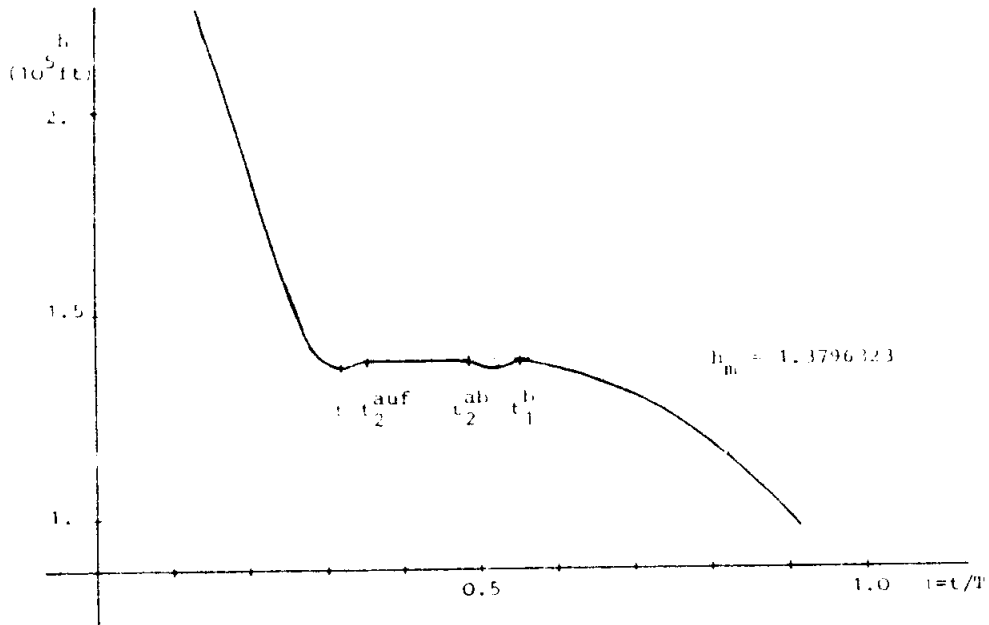


Fig. 31e: Ein Randbogen und ein Berührungspunkt

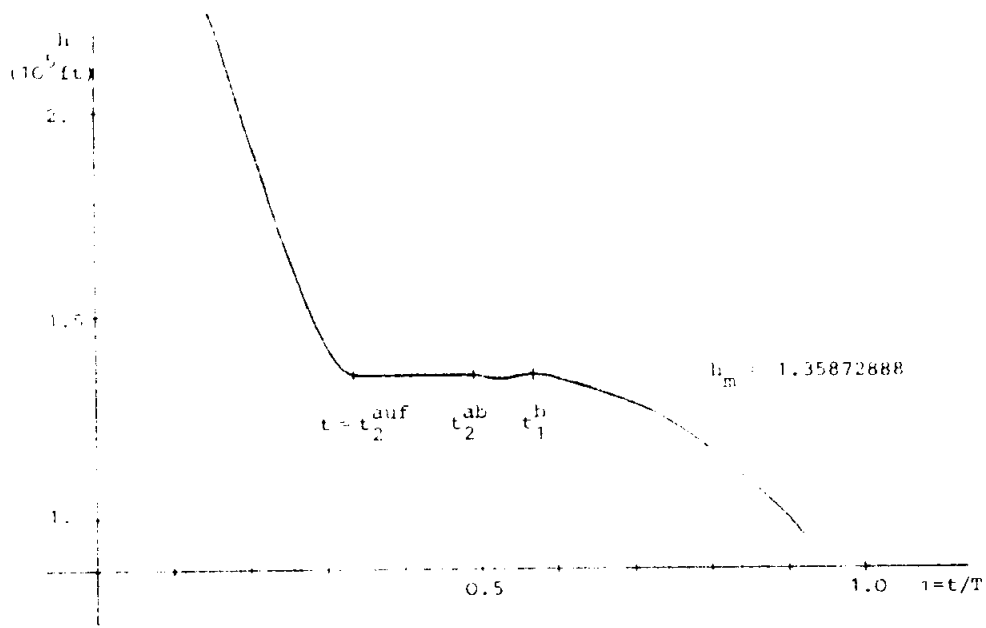


Fig. 31f: Direkter Übergang - ohne Wiederaufstieg - in Randbogen

Literatur

- [1] Berkovits, L.D. Variational methods in problems of control and programming,
J. Math. Anal. Appl. 4, 297-308 (1961)
- [2] Bock, H.G. Numerische Optimierung zustandsbeschränkter
parameterabhängiger Prozesse unter Anwendung
der Mehrzielmethode,
Diplomarbeit, Köln, 1974
- [3] -,- Zur numerischen Behandlung zustandsbeschränkter
Steuerungsprobleme mit Mehrzielmethode und Ho-
motopieverfahren,
GAMM, Graz 1976, ZAMM 57, 266-268 (1977)
- [4] -,- Numerical Solution of Nonlinear Multipoint
Boundary Value Problems with Applications to
Optimal Control,
GAMM, Copenhagen 1977
- [5] Bryson, A.E.,
Denham, W.F.,
Dreyfus, S.E. Optimal Programming Problems with Inequality
Constraints I,
AIAA Journal 1, 2544-2550 (1963)
- [6] Bulirsch, R. Die Mehrzielmethode zur numerischen Lösung von
nichtlinearen Randwertproblemen und Aufgaben
der optimalen Steuerung,
Carl-Cranz-Gesellschaft, 1961
- [7] Bulirsch, R.,
Stoer, J.,
Deuflhard, P. Numerical Solution of Nonlinear Two-point
Boundary Value Problems I,
erscheint in Numer. Math., Handbook Series
Approximation
- [8] Deuflhard, P. A Modified Newton Method for the Solution of
Ill-Conditioned Systems of Nonlinear Equations
with Application to Multiple Shooting,
Numer. Math. 22, 289-315 (1974)
- [9] -,- A Relaxation Strategy for the modified Newton
Method,
in Bulirsch, R. et al. (eds), Optimization and
Optimal Control, LN Math. 477 (1975)
- [10] -,- A Stepsize Control for Continuation Methods
with Special Application to Multiple Shooting
Techniques,
TUM-Report 7627 (1976)
- [11] -,- A Modified Continuation Method for the Numerical
Solution of Nonlinear Two-point Boundary Value
Problems by Shooting Techniques,
Numer. Math. 26, 327-343 (1976)

- [12] Dickmanns, E.D. Optimale Steuerung für Gleitflugbahnen maximaler Reichweite beim Eintritt in Planetenatmosphäre, in Bulirsch, R. et al. (eds), Optimization and Optimal Control, LN Math. 477 (1975)
- [13] Gillessen, W. Optimale Steuerung bei einer Beschränkung im Phasenraum und deren numerische Berechnung, dokumentiert an zwei Beispielen aus der Flugbahnoptimierung für Ordnungen der Zustandsbeschränkung $q = 0$ und $q = 2$, Diplomarbeit, Köln, 1974
- [14] Jacobson, D.H.,
Lele, M.M.,
Speyer, J.L. New Necessary Conditions of Optimality for Control Problems with State-Variable Inequality Constraints, J. Math. Anal. Appl. 35, 255-284 (1971)
- [15] Kelley, H.J. Method of Gradients, in G. Leitman (ed), Optimization Techniques, Academic Press, N.Y., 1962
- [16] Maurer, H.
Gillessen, W. Application of Multiple Shooting to the Numerical Solution of Optimal Control Problems with Bounded State Variables, Computing 15, 105-126 (1975)
- [17] Maurer, H.,
Heidemann, U. Optimale Steuerprozesse mit Zustandsbeschränkungen, in Bulirsch, R. et al. (eds), Optimization and Optimal Control, LN Math. 477 (1975)
- [18] Maurer, H. Optimale Steuerprozesse mit Zustandsbeschränkungen, Habilitationsschrift, Würzburg, 1976
- [19] Mc Intyre, J.,
Paiewonsky, B. On Optimal Control with Bounded State Variables, Advances in Control Systems 5, 1967
- [20] Oberle, H.J. Numerische Behandlung singulärer Steuerungen mit der Mehrzielmethode am Beispiel der Klimatisierung von Sonnenhäusern, Dissertation, München, 1977
- [21] Pesch, H.J. Numerische Berechnung optimaler Steuerungen mit Hilfe der Mehrzielmethode, dokumentiert am Problem der Rückführung eines Raumgleiters unter der Berücksichtigung von Aufheizungsbeschränkungen, Diplomarbeit, Köln, 1973
- [22] Seydel, R. Numerische Berechnung von Verzweigungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, TUM-Report 7736 (1977)
- [23] Bock, H.G.,
Koller, E. Numerical Solution of Minimax Control Problems by Continuation, erscheint