

## Einführung in die Numerik

WS 2008/2009

2. Übungsblatt

### Aufgabe 2.1 (4 Punkte)

Die Funktion  $f(x) = x + 1$  stelle eine physikalische Größe dar, von der Werte  $\tilde{f}(x_i) \approx f(x_i)$  an äquidistant verteilten Punkten

$$x_i = ih, \quad 0 \leq i \leq n := 10^3, \quad h = 10^{-3},$$

mit einem maximalen Fehler von 0,1% gemessen werden. Man zeige, daß bei der Approximation der Ableitungswerte  $f'(x_i)$  mit dem zentralen Differenzenquotienten

$$f'(x_i) \approx \frac{\tilde{f}(x_{i+1}) - \tilde{f}(x_{i-1}))}{2h}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

ein relativer Fehler von 100% auftreten kann. (Hinweis: Man konstruiere spezielle Störungen.)

### Aufgabe 2.2 (2 Punkte)

Es seien die Nullstellen eines Polynoms

$$y = p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \tag{1}$$

zu bestimmen. Man zeige, daß für eine Näherung  $\tilde{z}$  zu einer einfachen Nullstelle  $z \neq 0$  in erster Näherung die folgende Abschätzung gilt:

$$\left| \frac{\tilde{z} - z}{z} \right| \leq \left| \frac{p(\tilde{z})}{p'(z)z} \right|.$$

(Hinweis: Die Aufgabe ist leichter als sie aussieht; Taylor-Entwicklung.)

### Aufgabe 2.3 (6 Punkte)

Es gehe darum, ein Polynom der Form (1) numerisch zu berechnen. Hierzu bieten sich zwei Algorithmen an.

- A) Die Berechnung aller  $n + 1$  Terme, und eine abschliessende Addition.
- B) Das sogenannte *Horner-Schema*, eine Berechnung basierend auf der Darstellung

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-1} + xa_n) \dots)).$$

- a) Schreiben Sie beide Algorithmen in Pseudocode<sup>1</sup> auf.
- b) Analysieren Sie die Anzahl der Operationen, die zur Berechnung ausgeführt werden müssen.
- c) Führen Sie für den Fall  $n = 2$  mit  $a_0 = 0$  eine Rundungsfehleranalyse durch und vergleichen Sie die beiden Algorithmen. Wo liegt der Unterschied, und ist das Ergebnis übertragbar auf  $n > 2$ ? Wie sind die relativen Fehler in der Nähe der Nullstellen von  $p(x)$ ?

<sup>1</sup><http://de.wikipedia.org/wiki/Pseudocode>

**Aufgabe 2.4** (4 Punkte)

Die Genauigkeit der Approximation der Ableitung durch den einseitigen Differenzenquotienten

$$g(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2)$$

hängt stark von der Wahl von  $h$  ab. In der Praxis wählt man oft  $h \approx \sqrt{\text{eps}}$ . Begründen Sie für welche  $f''$  diese Wahl sinnvoll ist.

(Hinweis: Betrachten Sie Rundungs- und Abbruchfehler gemeinsam und schauen Sie, für welchen Wert von  $h$  die Fehlerschranke minimal wird.)

**Programmieraufgabe P2:** (10 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die numerische Berechnung von Ableitungen mittels finiter Differenzen implementiert werden.

- a) Schreiben Sie ein Programm, das diese Funktionen berechnet:

$$f_1(x) = x_1^2 x_2 + 0.1 e^{2x_1 + x_2}, \quad f_2(x) = x_1 x_2 + \sin(x_1^2), \quad f_3(x) = \sqrt{x_1}/x_2$$

- b) Leiten Sie die Funktionen analytisch ab und berechnen Sie die exakten Richtungs-Ableitungen

$$\frac{\partial f_i(x_1, x_2)}{\partial x_1} d_1 + \frac{\partial f_i(x_1, x_2)}{\partial x_2} d_2$$

numerisch an der Stelle  $(x_1, x_2) = (2, 3)$  für die Richtung  $(d_1, d_2) = (2.3, 3.3)$ .

- c) Berechnen Sie die Ableitung mit Hilfe der Differenzenquotienten

$$g(x, d, h) = \frac{f(x+hd) - f(x)}{h} \quad \text{und} \quad h(x, d, h) = \frac{f(x+hd) - f(x-hd)}{2h}$$

an der Stelle  $(x_1, x_2) = (2, 3)$  für die Richtung  $(d_1, d_2) = (2.3, 3.3)$  und für gegebenes  $h$ .

- d) Bilden Sie die Differenz zwischen der exakten Ableitung und den bestimmten Differenzenquotienten. Verwenden Sie hierzu eine Schleife

```
#include <math.h>
#include <stdio.h>
#include <float.h>
#define STEPZIZE 0.08
...
double step = 1.0;
do {
    h = pow( 10, -step );
    ...
    step = step + STEPSIZE;
} while ( h >= DBL_EPSILON );
```

Schreiben Sie die Werte  $h, \left| \frac{\partial f_i(x_1, x_2)}{\partial x} d - g(x, d, h) \right|$  in eine Datei und plotten Sie sie auf einer logarithmischen Skala. Hinweise zur Ausgabe von Daten in eine Datei und zum Plotten mit gnuplot finden Sie auf der Webseite <http://mathopt.uni-hd.de/TEACHING>.

- e) Erklären Sie die plots und stellen Sie die Verbindung zu Aufgabe 2.4 her.

**Abgabetermin: Freitag, 31.10.2008, nach der Vorlesung**