

Einführung in die Numerik

WS 2008/2009

12. Übungsblatt

Aufgabe 12.1 (4 + 2 Bonus-Punkte)

a) Betrachten Sie die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 12 \\ x_2^4 - 16 \end{pmatrix}$$

und wenden Sie auf diese Funktion das Newton-Verfahren an. Führen Sie 4 Newton-Iterationen (von Hand) durch, beginnend mit dem Startwert $x^0 = (5, -3)^T$.

b) Betrachten Sie das Polynom $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) = x^3 - 2x + 2$. Berechnen Sie zwei Newton-Schritte zur Lösung von $F(x) = 0$ ausgehend vom Startwert $x^0 = 0$. Was beobachten Sie?

Aufgabe 12.2 (4 Bonus-Punkte)

Schreiben Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung aller Nullstellen einer gegebenen differenzierbaren Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ in Pseudo-Code auf. Verwenden Sie beispielsweise eine äußere Schleife mit zufälligen Startwerten, um alle Nullstellen zu erhalten.

Aufgabe 12.3 (4 Bonus-Punkte)

Zur Berechnung der Lösung $x^* \in [0.5, 0.6]$ der Gleichung $x + \ln(x) = 0$ werden folgende Fixpunktiterationen vorgeschlagen:

- a) $x_{k+1} = x_k - (x_k + \ln(x_k));$
- b) $x_{k+1} = x_k - (x_k - e^{-x_k});$
- c) $x_{k+1} = x_k - \frac{1}{2}(x_k - e^{-x_k}).$

Welche dieser Iterationen kann man verwenden, welche sollte man verwenden, und läßt sich vielleicht eine noch "bessere" Iteration angeben? (Hinweis: beachten Sie die Schranken an x^* und betrachten Sie für die letzte Fragestellung eine Kombination aus zweien der Vorschläge.)

Aufgabe 12.4 (4 Bonus-Punkte)

Zur Lösung von nichtlinearen Ausgleichsproblemen

$$\min_x \frac{1}{2} \|F(x)\|_2^2$$

mit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq n$ benutzt man *Gauß-Newton-Verfahren*, d. h. man berechnet ausgehend von einem Startwert $x^0 \in \mathbb{R}^n$ iterativ $x^{k+1} = x^k + \Delta x^k$ und löst dabei eine Folge von linearisierten Ausgleichsproblemen

$$\min_{\Delta x^k} \frac{1}{2} \|F(x^k) + J(x^k)\Delta x^k\|_2^2$$

mit $J(x^k) = \frac{dF}{dx}(x^k)$.

1. Wie lautet für dieses Verfahren in der Darstellung

$$x^{k+1} = x^k - M(x^k)F(x^k)$$

die Matrix $M(x^k)$?

2. Wie löst man die linearen Ausgleichsprobleme am besten numerisch?

Programmieraufgabe P12: (8 Bonus-Punkte)

- a) Implementieren Sie das mehrdimensionale Newtonverfahren für den Spezialfall von Aufgabe 12.1 a) und prüfen Sie Ihre Ergebnisse numerisch nach.
- b) Implementieren Sie einen geeigneten Algorithmus und prüfen Sie die Ergebnisse von Aufgabe 12.3 numerisch nach.

Abgabetermin: Freitag, 23.1.2009

Beachten Sie: dieses Blatt geht nur noch über Bonuspunkte in die Wertung ein, bietet Ihnen daher die Chance, die Klausur-Zulassung doch noch zu erlangen bzw. Ihre Note zu verbessern. Korrigierte Übungsblätter können zusammen mit der Klausur am 30. Januar 2009 in Raum 432, INF 368, abgeholt bzw. eingesehen werden. Es wird angestrebt, eine Musterlösung des Blattes 12 bis zum 24. Januar auf der Übungswebseite zur Verfügung zu stellen.