

## Einführung in die Numerik

WS 2008/2009

12. Übungsblatt

### Lösung zu Aufgabe 12.1: (6 Punkte)

- a) Es gilt  $F(x_1, x_2) = (3x_1^2 - 12, x_2^4 - 16)^T$ . Demnach  $\partial F_1/\partial x_2 = \partial F_2/\partial x_1 = 0$  und  $\partial F_1/\partial x_1 = 6x_1$  und  $\partial F_2/\partial x_2 = 4x_2^3$ . Die Inverse der Jacobimatrix ist durch die Diagonalmatrix

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\partial F_1/\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\partial F_2/\partial x_2} \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir schreiben  $J := (\partial F_1/\partial x_1, \partial F_2/\partial x_2)^T$  und  $x^{i+1} = x^i + \Delta x^i$ . Eingesetzt:

$$1. \quad x^0 = (5, -3)^T \rightarrow F = (63, 65), \quad J = (30, -108), \quad \Delta x^0 = \left(-\frac{63}{30}, \frac{65}{108}\right).$$

und so weiter. Numerisch ergibt sich

Iteration $k$	$x_1^k$	$x_2^k$	$F_1(x^k)$	$F_2(x^k)$
1	5.000000000000	-3.000000000000	63.000000000000	65.000000000000
2	2.900000000000	-2.398148148148	13.230000000000	17.075318457564
3	2.139655172414	-2.088633793883	1.734372770511	3.030456327038
4	2.004557642613	-2.005484007735	0.054754027675	0.176211352036
5	2.000005181219	-2.000022453098	0.000062174714	0.000718511236
6	2.000000000007	-2.000000000378	0.000000000081	0.000000012099

- b) Gegeben ist  $F(x) = x^3 - 2x + 2$ . Es folgt  $F'(x) = 3x^2 - 2$  und damit

$$F(0) = 2, \quad F'(0) = -2.$$

Der Newtonschritt für  $x^0 = 0$  lautet  $x^1 = x^0 - F(x^0)/F'(x^0) = 0 + 2/2 = 1$ . Mit

$$F(1) = 1, \quad F'(1) = 1$$

folgt für  $x^1 = 1$  der nächste Schritt  $x^2 = x^1 - F(x^1)/F'(x^1) = 1 - 1/1 = 0$ . Die Iterationen werden also immer zwischen 0 und 1 hin- und herspringen, der Algorithmus wird nie konvergieren. *Hinweis:* Es gibt sogar einen kleinen Einzugsbereich, aus dem heraus das Newtonverfahren in diese Endlosschleife hineinläuft:

Iteration $k$	$x^k$	$F(x^k)$	$F'(x^k)$
1	0.010000000000	1.980001000000	-1.999700000000
2	1.000149022353	1.000149088980	1.000894200743
3	0.000893468433	1.998213063848	-1.999997605142
4	1.000001196717	1.000001196721	1.000007180306
5	0.000007180259	1.999985639483	-1.999999999845
6	1.000000000077	1.000000000077	1.000000000464
7	0.000000000464	1.999999999072	-2.000000000000
8	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000
9	0.000000000000	2.000000000000	-2.000000000000

**Lösung zu Aufgabe 12.2:** (4 Punkte)

Newton-Verfahren mit  $N$  Zufallsstartwerten im Pseudo-Code:

INPUT: Funktion  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , Abbruchtoleranz  $\epsilon$

FOR  $l = 1 \dots N$

Bestimme Zufallsstartwert  $x_l^0$ . Setze  $k = 0$ .

Werte  $\nabla F(x_l^0)$  und  $F(x_l^0)$  aus.

DO

Löse  $\nabla F(x_l^k) \Delta x_l^k = F(x_l^k)$ , erhalte  $\Delta x_l^k$ .

Schritt  $x_l^{k+1} = x_l^k - \Delta x_l^k$ , und  $k = k + 1$ .

Werte  $\nabla F(x_l^k)$  und  $F(x_l^k)$  aus.

WHILE  $\|F(x_l^k)\|_2 > \epsilon$

Speichere Lösung  $x_l^* = x_l^k$ .

END FOR

OUTPUT: Liste aller gefundenen Nullstellen  $x_l^*$  für  $l = 1 \dots N$ .

**Lösung zu Aufgabe 12.3:** (4 Punkte)

Die Ableitung der Fixpunktabbildung  $g$  im Fixpunkt läßt sich wie folgt abschätzen:

$$a) \quad g(x) = -\ln(x) \quad \Rightarrow \quad |g'(z)| = \left| \frac{1}{z} \right| \geq \frac{1}{0.6} > 1.$$

$$b) \quad g(x) = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad |g'(z)| = |e^{-z}| \leq 4e^{-0.5} \approx 0,61 < 1.$$

$$c) \quad g(x) = \frac{1}{2}(x + e^{-x}) \quad \Rightarrow \quad |g'(z)| = \frac{1}{2}|1 - e^{-z}| \leq \frac{1}{2}|1 - e^{-0.6}| \approx 0,23 < 1.$$

Die Iteration (a) divergiert. Die Iterationen (b) und (c) können verwendet werden, wobei (c) die kleinere (lineare) Konvergenzrate besitzt.

Ein Vergleich von (b) und (c) legt die folgende allgemeine Form einer Iterationsvorschrift nahe:

$$(1 + \beta)x_{k+1} = \beta x_k + e^{-x_k}, \quad g(x) = \frac{1}{1 + \beta}(\beta x - e^{-x}).$$

Dafür gilt

$$|g'(z)| = \frac{1}{1 + \beta}|\beta - e^{-z}| = \frac{1}{1 + \beta}|\beta - z|.$$

Die "richtige" Wahl ist also  $\beta = z$ .

1. Wähle  $\beta = 0,5$ ,  $\beta = 0,6$  oder  $\beta$  als Intervallmittelpunkt  $\beta = 0,55$ . Dies ergibt

$$|g'(z)| \leq 0,071, \quad |g'(z)| \leq 0,032, \quad |g'(z)| \leq 0,036.$$

2. Wähle  $\beta$  so, daß  $g'(0,5) = -g'(0,6)$ . Dies ergibt

$$\beta \approx 0,5777, \quad |g'(z)| \leq 0,019.$$

**Lösung zu Aufgabe 12.4:** (4 Punkte)

Um das linearisierte Ausgleichsproblem zu lösen, sucht man eine Nullstelle der ersten Ableitung. Es gilt mit  $J(x^k) = \frac{dF}{dx}(x^k)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \Delta x^k} \frac{1}{2} \|F(x^k) + J(x^k) \Delta x^k\|_2^2 &= \frac{\partial}{\partial \Delta x^k} \frac{1}{2} (F(x^k) + J(x^k) \Delta x^k)^T (F(x^k) + J(x^k) \Delta x^k) \\ &= J(x^k)^T J(x^k) \Delta x^k + J(x^k)^T F(x^k)\end{aligned}$$

Mit der Schreibweise  $\Delta x^k = x^{k+1} - x^k$  löst man auf und erhält

$$x^{k+1} = x^k - (J(x^k)^T J(x^k))^{-1} J(x^k)^T F(x^k).$$

Die Antwort lautet also  $M(x^k) = (J(x^k)^T J(x^k))^{-1} J(x^k)^T$ .

Um das linearisierte Problem zu lösen, muss die Gleichung

$$J(x^k)^T J(x^k) \Delta x^k = -J(x^k)^T F(x^k)$$

für  $\Delta x^k$  gelöst werden. Berechnet man eine  $QR$ -Zerlegung von  $J = J(x^k) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , so erhält man

$$J^T J = (QR)^T QR = R^T R \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Insbesondere müssen die Matrizen  $J^T$  und  $J$  also nicht miteinander multipliziert werden. Das System

$$R^T R \Delta x^k = -J(x^k)^T F(x^k)$$

kann via Vorwärts- und Rückwärtssubstitution aufgelöst werden.