Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. W. Jäger
Julian Scheuer

Sommersemester 2012
20.04.2012
Blatt 1

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis

Aufgabe 1.1 (4 Punkte)
Der Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$, $C^0([0,1])$, ist mit der Supremumsnorm

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

ein normierter Raum. Finden Sie in diesem Raum ein Gegenbeispiel zu dem aus dem $\mathbb{R}^n$ bekannten Satz von Bolzano-Weierstrass.

Aufgabe 1.2 (4 Punkte)
Betrachten Sie das Sturm-Liouville Problem zum Differentialoperator auf $C^2([0,\frac{\pi}{2}])$

$$Lu = -u'' - u$$

und den Randwerten

$$u(0) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Bestimmen Sie die zu diesem Problem gehörige Greensche Funktion.

Aufgabe 1.3 (4 Punkte)
Betrachte den unendlichdimensionalen Vektorraum

$$l = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon \exists j \in \mathbb{N}\ \forall i \geq j \colon x_i = 0\}$$

mit der Norm

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|.$$

Definiere die Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi\colon l &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n x_n.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass Φ eine unstetige lineare Abbildung ist.

Aufgabe 1.4 (4 Punkte)
Sei $B_1(0)$ die offene Einheitskugel in $\mathbb{R}^2$. In Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}x^1 &= r\cos\phi\\ x^2 &= r\sin\phi\end{aligned}$$

werde die Funktion u definiert durch

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} r^{j!} \frac{1}{j^2} \sin(j!\phi).$$

Zeigen Sie, dass $u \in C^0(\overline{B_1(0)})$, $\Delta u = 0$ und

$$\int_{B_1(0)} |\nabla u|^2 = \infty$$

ist.

Abgabe: Freitag, 27.04.2012, 17 Uhr.