Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. W. Jäger
Julian Scheuer

Sommersemester 2012
27.04.2012
Blatt 2

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)
Sei X ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist. X heißt normal, wenn einpunktige Mengen abgeschlossen sind und für zwei disjunkte, abgeschlossene Mengen A und B offene Mengen U und V existieren mit

$$A \subset U, \ B \subset V \text{ und } U \cap V = \emptyset.$$

Zeigen Sie, dass jeder metrische Raum normal ist.

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $1 \leq p \leq \infty$ und $\mathcal{L}^p(\Omega)$ der Raum der p-integrablen bzw. wesentlich beschränkten Funktionen bezüglich des Lebesgue-Maßes. Sind die zugehörigen $\mathcal{L}^p$-Normen auf dem Raum $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ äquivalent? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 2.3 (6 Punkte)
Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Zeigen sie, dass die Norm genau dann von einem Skalarprodukt herrührt, wenn die sogenannte Parallelogrammgleichung gilt:

$$\forall x, y \in V\colon \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Aufgabe 2.4 (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass der Raum $C^0([0,1])$ mit der $\mathcal{L}^1$-Norm nicht vollständig ist.

Abgabe: Freitag, 04.05.2012, 17 Uhr.