Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. W. Jäger
Julian Scheuer

Sommersemester 2012
04.05.2012
Blatt 3

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis

Aufgabe 3.1 (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie, dass der Raum $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ für $0 < \alpha \leq 1$ und $m \in \mathbb{N}$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)
Beweisen Sie die verallgemeinerte Höldersche Ungleichung, d.h. für Funktionen $f_i \in \mathcal{L}^{p_i}_\mu(M, \mathbb{K})$ auf einem Maßraum (M, μ) gilt

$$\| \prod_{i=1}^n f_i \|_1 \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i},$$

wobei $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$.

Aufgabe 3.3 (2+2 Punkte)
Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prähilbertraum und $0 \neq x \in H$, dann gelten

$$(1)\ \|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow y = lx, l \geq 0,$$

und

$$(2)\ \|tx + (1-t)y\|^2 < t\|x\|^2 + (1-t)\|y\|^2 \quad \forall x \neq y\ \forall 0 < t < 1,$$

d.h. $\| \cdot \|^2$ ist strikt konvex.

Aufgabe 3.4 (4 Punkte)
Beweisen Sie, dass im $\mathbb{R}^n$ weder die l^1-, noch die l^∞-Norm von einem Skalarprodukt erzeugt wird. Wie kann man diese Aussage anhand der zugehörigen Einheitssphären visualisieren?

Abgabe: Freitag, 11.05.2012, 17 Uhr.