**Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg**
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. W. Jäger
Julian Scheuer

Sommersemester 2012
01.06.2012
Blatt 7

# Übungen zur Vorlesung
# Funktionalanalysis

**Aufgabe 7.1** (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Bestimmen Sie ein Funktional $\phi \in (L^\infty(\Omega))'$, welches sich nicht in der Form

$$f \mapsto \int_\Omega fg,$$

mit $g \in L^1(\Omega)$ schreiben lässt.

**Aufgabe 7.2** (4 Punkte)
Beweisen Sie, dass ein lineares Funktional

$$f\colon l^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

existiert, sodass

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon \liminf_{n\to\infty} a_n \leq f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

**Aufgabe 7.3** (2+2 Punkte)
Ein Banachraum $X$ heißt gleichmäßig konvex, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x, y \in X$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$

$$\|\frac{1}{2}(x+y)\| > 1 - \delta \Rightarrow \|x - y\| < \epsilon.$$

Beweisen Sie
(1) Weder $L^\infty(\mathbb{R})$ noch $L^1(\mathbb{R})$ sind gleichmäßig konvex.
(2) Jeder Hilbertraum ist gleichmäßig konvex.

**Aufgabe 7.4** (3+1 Punkte)
Sei $\Omega$ ein Maßraum mit Maß $\mu$.
(1) Zeigen sie, dass für $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$, $2 \leq p < \infty$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^p_{L^p} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|^p_{L^p} \leq \frac{1}{2}\|f\|^p_{L^p} + \frac{1}{2}\|g\|^p_{L^p}$$

gilt.
(2) Folgern Sie, dass die Räume $L^p(\Omega, \mu)$, $2 \leq p < \infty$, gleichmäßig konvex sind.

**Abgabe:** Freitag, 08.06.2012, 17 Uhr.