Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. W. Jäger
Julian Scheuer

Sommersemester 2012
29.06.2012
Blatt 11

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis

Aufgabe 11.1 (2+2+2 Punkte)
Im Folgenden seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt stetig, wenn das Urbild einer jeden offenen Menge offen ist. X heißt kompakt, wenn X überdeckungskompakt ist. Beweisen Sie
(1) Ist X kompakt und $f\colon X \to Y$ stetig, dann ist $f(X)$ kompakt,
(2) Ist X Hausdorff und $K \subset X$ kompakt, so ist K abgeschlossen und
(3) Ist X kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist A kompakt.

Aufgabe 11.2 (4 Punkte)
Sei X ein kompakter topologischer Raum, Y ein Hausdorffraum, $f\colon X \to Y$ stetig und bijektiv. Zeigen Sie, dass f ein Homöomorphismus ist, d.h. f^{-1} ist ebenfalls stetig.

Aufgabe 11.3 (4 Punkte)
Sei X ein reflexiver Banachraum und Y ein abgeschlossener Teilraum. Beweisen Sie, dass Y reflexiv ist.

Aufgabe 11.4 (2 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie, dass die Einbettung

$$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$$

kompakt ist.

Abgabe: Freitag, 06.07.2012, 17 Uhr.