Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. W. Jäger
Julian Scheuer

Sommersemester 2012
06.07.2012
Blatt 12

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis

Aufgabe 12.1 (4 Punkte)
Sei $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ die offene Kugel mit Radius r um 0.
(i) Zeigen Sie, dass eine sogenannte Friedrichsche Glättungsfunktion existiert, d.h. eine Funktion $\eta \in C_c^\infty(B_1(0))$ mit $\eta \geq 0$ und $\int_{B_1(0)} \eta = 1$.
(ii) Sei $\epsilon > 0$ und $\eta_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\eta(\frac{x}{\epsilon})$. Zeigen Sie, dass $\eta_\epsilon \in C_c^\infty(B_\epsilon(0))$ und $\int_{B_\epsilon(0)} \eta_\epsilon = 1$.

Aufgabe 12.2 (8 Punkte)
Sei η eine Friedrichsche Glättungsfunktion wie in Aufgabe 12.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1(\Omega)$ und setze f auf das Komplement von Ω durch 0 fort. Definiere die Mollifizierung von f durch

$$f_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x-y)f(y)dy.$$

Sei $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $\epsilon > 0$ beliebig. Beweisen Sie

(1) $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
(2) Sei $K \subset \Omega$ kompakt und f zusätzlich noch stetig auf Ω, so konvergiert f_{ϵ_n} gleichmäßig auf K gegen f.
(3) Es gilt $\text{supp} f_\epsilon \subset B_\epsilon(\text{supp} f)$.
(4) Sei $m \in \mathbb{N}_+$ und f noch zusätzlich von der Klasse $C^m(\Omega)$. Sei $B_\epsilon(x) \subset \Omega$, so ist $D^\alpha f_\epsilon(x) = (D^\alpha f)_\epsilon(x)$ für alle Multiindizees $|\alpha| \leq m$. Für $\Omega' \Subset \Omega$ gilt

$$\|f_{\epsilon_n} - f\|_{C^m(\Omega')} \to 0, n \to \infty.$$

(5) Sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, so gilt $\|f_{\epsilon_n} - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0, n \to \infty$.

Aufgabe 12.3 (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt. Zeigen Sie, dass eine Funktion $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ existiert mit

$$0 \leq \phi \leq 1$$

und

$$\phi_{|K} = 1.$$

Abgabe: Freitag, 13.07.2012, 17 Uhr.