

## Mathematik A für die Molekulare Biotechnologie, WS 2002/3

### Übungsblatt 8

#### Aufgabe 1.

Drei verschmuste Kätzchen sollen einzeln gewogen werden, wollen aber nicht allein auf die kalte Waage. Die Tierärztin hat Verständnis und legt sie immer zu zweit in die Waagschale (das dritte Kätzchen bleibt jeweils solange auf dem Arm des Besitzers und wird gekraut). Die Ergebnisse der drei Messungen sind: Kätzchen 1 und 2 zusammen: 1.6 kg; Kätzchen 1 und 3 zusammen: 1.2 kg; Kätzchen 2 und 3 zusammen: 1.8 kg. Wieviel wiegt jedes der Kätzchen?

$$\text{Tipp: } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(4 Punkte)

#### Aufgabe 2.

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke mit Vektoren  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  und  $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  und Matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , indem Sie die Ausdrücke, falls möglich, zunächst geeignet vereinfachen und dann erst zu rechnen anfangen.

- $2(A^T x)^T - x^T A$
- $y^T x$  und  $(xy^T)x$
- $(xy^T)(xx^T)$
- $(A + xy^T)x$

(4 Punkte)

#### Aufgabe 3.

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und die Einheitsmatrix  $\mathbb{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- $ABB^{-1}A^{-1}$
- $A(2\mathbb{I}_n - A^{-1}\mathbb{I}_n A)B$
- $A^{-1}(BA^T + A^T)^T$
- $AB^{-1} - (BA^{-1})^{-1}$

(4 Punkte)

#### Aufgabe 4. (SCILAB)

Die Bevölkerungsentwicklung eines Landes von einem Jahr zum nächsten folgt in etwa einem linearen Gesetz der Form  $x_{\text{neu}} = Ax_{\text{alt}}$ , nämlich

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}_{\text{neu}} = \begin{bmatrix} 0.88 & 0.001 & 0.06 & 0.07 & 0.01 & 0.002 & 0.001 & 0 \\ 0.098 & 0.89 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.099 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.89 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.099 & 0.89 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.099 & 0.80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.09 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}_{\text{alt}}$$

wobei  $x_i$  die Anzahl aller Personen im  $i$ -ten Lebensjahrzehnt ist. In  $x_8$  sind zusätzlich zu den Personen im Alter von 70-80 auch noch alle Personen über 80 Jahre enthalten.

*Zur Bedeutung:* Das Feld  $a_{13} = 0.06$  besagt z.B., dass jeder aus der Gruppe  $x_3$  der 20-30 jährigen im Durchschnitt pro Jahr 0.06 Kinder bekommt, die zur Gruppe  $x_1$  der 0-10 jährigen hinzukommen. Der nichtverschwindende Geburtenbeitrag  $a_{17} = 0.001$  der 60-70 jährigen ist auf den Beitrag von Männern mit wesentlich jüngeren Frauen zurückzuführen.

Die Felder  $a_{33} = 0.9$  und  $a_{43} = 0.1$  bedeuten, dass jedes Jahr 10% der Gruppe  $x_3$  durch Älterwerden in die Gruppe  $x_4$  übergehen. Bei den jüngeren und den älteren Jahrgängen gibt es einige Todesfälle, so dass die beiden entsprechenden Matrixeinträge sich nicht mehr zu eins summieren. Beispielsweise summieren sich  $a_{11} = 0.88$  und  $a_{21} = 0.098$  zu  $a_{11} + a_{21} = 0.989 < 1$ , und der Rest der 0-10 jährigen, d.h. 1.1%, verstirbt jedes Jahr.

#### Aufgabe:

In einem Jahr sei die Altersstruktur des Landes (in Millionen) durch die Zahlen

$$x = [2.39, 1.39, 1.02, 2.72, 4.64, 3.77, 1.73, 0.62]^T$$

gegeben.

Wie sieht die Bevölkerung wahrscheinlich in 5 Jahren aus, wie in 20 Jahren? Wie sah sie vor 1 und vor 5 Jahren aus? Drucken Sie die heutige Altersstruktur und die vier berechneten in einem Plot, und geben Sie diesen Plot mit dem Übungsblatt ab. Geben Sie ausserdem die von Ihnen verwendeten SCILAB-Befehle an.

*Tipp 1:* Benutzen Sie SCILAB- Kurzform  $A^n$  für die  $n$ -fache Matrizenmultiplikation  $A*A*...*A$ , und den Befehl  $\text{inv}(A)$ , um die Inverse zu berechnen. Was berechnet  $A^{(-n)}$ ?

*Tipp 2:* Sie können sich die Matrix  $A$  und den Vektor  $x$  als SCILAB-Skript mit dem Namen `blatt08aufgabe4.sci` von der Übungsblätter-Seite [http://www.iwr.uni-heidelberg.de/~agbock/teaching/2002ws/bio\\_ueb.php](http://www.iwr.uni-heidelberg.de/~agbock/teaching/2002ws/bio_ueb.php) herunterladen, dann müssen Sie die Zahlen nicht abtippen.

*Bemerkung für Interessierte:* Das Modell könnte wesentlich verbessert werden, wenn man die Bevölkerung statt in Lebensjahrzehnte in kleinere Gruppen, am besten in Lebensjahre unterteilen würde. Wie würden sich dann die Übergangszahlen von einer Gruppe zur nächsten durch Älterwerden verändern?

(4 Punkte)