

Mathematik A für die Molekulare Biotechnologie, WS 2002/3

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. (Stetigkeit von Funktionen)

In welchen Punkten ihres jeweiligen Definitionsbereichs sind die folgenden Funktionen stetig sind?

1.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto x^3.$$

2.

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Weisen Sie die Stetigkeit von f in jedem x_0 direkt unter Benutzung der Definition von Stetigkeit (Folgenkriterium) oder mit dem δ - ϵ -Kriterium nach. Bei der Untersuchung von g dürfen Sie alle aus der Vorlesung bekannten Sätze verwenden. Die Unstetigkeit von g in $x_0 = 0$ können Sie z.B. zeigen, indem Sie für die Folgen $x^{(n)} = \frac{1}{2(n+1)\pi}$ und $\bar{x}^{(n)} = \frac{1}{2(n+1)\pi + \frac{\pi}{2}}$ (Welchen Grenzwert haben diese?), die entsprechenden Bildfolgen, gegeben durch $f(x^{(n)})$, bzw. $f(\bar{x}^{(n)})$, betrachten.

(2 + 3 = 5 Punkte)

*Aufgabe 2. (Zwischenwertsatz, freiwillige Zusatzaufgabe für Leute, die gerne knobeln!)

Begründen Sie, warum es zu jeder Zeit zwei zueinander antipodale Punkte auf dem Äquator gibt, an denen die gleiche Temperatur vorliegt. Dabei sind folgende Idealisierungen vorzunehmen: Der Äquator sei ein Kreis. Für jeden Punkt dieses Kreises sei die Temperatur T (in Grad Kelvin) zu jeder Zeit eine wohldefinierte reelle Zahl. Parametrisiert man den Kreis mit Hilfe der Winkelvariablen φ , so sei die 2π -periodische Funktion $T(\varphi)$ stetig. (2π -periodisch bedeutet: $\forall \varphi \in \mathbb{R} \quad T(\varphi + 2\pi) = T(\varphi)$. Der Punkt mit dem Winkel φ ist zu dem Punkt mit Winkel $\varphi_0 + \pi$ antipodal, liegt also auf demselben Durchmesser.)

Es ist also zu zeigen: Es gibt ein $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ mit $T(\varphi_0 + \pi) = T(\varphi_0)$.

Zusatzfrage: Gibt es in jedem Fall mehr als ein Paar solcher Antipodalpunkte auf dem Kreis mit gleichem Funktionswert?

(3 Zusatzpunkte)

Aufgabe 3. (Differenzierbarkeit)

Zeigen Sie, dass die Funktion f aus Aufgabe 1.1 in jedem Punkt x_0 (einmal) differenzierbar ist, indem Sie den Grenzwert des Differenzenquotienten berechnen.

(2 Punkte)

Aufgabe 4. (Berechnung von Ableitungen)

Berechnen Sie zu jeder der folgenden Funktionen deren erste Ableitung. Begründen Sie dabei kurz die Differenzierbarkeit der jeweiligen Funktion und Ihre Rechnungen durch Zitieren der benutzten Differentiationsregeln.

1.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 5x^3 + 2x + 1.$$

2.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-2x} \cdot \sin(x).$$

3.

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}.$$

4.

$$f :] - 1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

(8 Punkte)