

Mathematik B SS 03 Gerrit Schultz

1. BEMERKUNGEN ZUR LETZTEN Ü-STUNDE UND LÖSUNG VON AUFGABE 1.4 Ü-BLATT 4

Leider ist mir eine Unachtsamkeit in der letzten Übungsstunde passiert. Sie betraf Aufgabe 1.4. In einer Urne liegen $2N$ Kugeln. Aus der Urne werden zwei Kugeln nacheinander OHNE ZURÜCKLEGEN entnommen. Ich behauptete, man könne oBdA annehmen, der Laplace-Raum Ω habe die Gestalt:

$$\Omega = \{1, \dots, 2N\} \times \{1, \dots, 2N - 1\}$$

Ich hatte nicht bedacht, dass diese oBdA-Bedingung zu Schwierigkeiten führt, welche falsche Schlussfolgerungen nach sich zieht. Der 'richtige' Laplace-Raum lautet also, da die gleiche Kugel nicht zweimal gezogen werden kann:

$$\Omega = \{1, \dots, 2N\}^2 \setminus \{(1, 1), \dots, (2N, 2N)\}$$

1. Da Ω laut Voraussetzung ein Laplace-Raum ist, gilt:

$$P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{(2N)^2 - 2N} = \frac{1}{2N(2N - 1)}$$

wobei ω ein Elementarereignis ist (Ein Experiment besteht aus dem Ziehen BEIDER Kugeln, welche durchnummeriert sind) Für die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses E gilt, da Ω ein Laplace-Raum ist:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{|E|}{2N(2N - 1)}$$

2. Zu prüfen ist:

$$P(E_1) \cdot P(E_2) = P(E_1 \cap E_2).$$

Die Ereignismengen A, B, C können nun exakt angegeben werden:

$$\begin{aligned} A &= \{2, 4, \dots, 2N\} \times \{1, 2, \dots, 2N\} \setminus \{(2, 2), \dots, (2N, 2N)\} \\ B &= \{1, 2, \dots, 2N\} \times \{1, 3, \dots, 2N - 1\} \setminus \{(1, 1), \dots, (2N - 1, 2N - 1)\} \\ C &= \{1, 3, \dots, 2N - 1\}^2 \cup \{2, 4, \dots, 2N\}^2 \setminus \{(1, 1), \dots, (2N, 2N)\} \end{aligned}$$

Die Anzahl der Elemente von A, B, C kann nun einfach ausgerechnet werden:

$$\begin{aligned} |A| &= N \cdot 2N - N = N(2N - 1) \Rightarrow P(A) = \frac{N(2N - 1)}{2N(2N - 1)} = \frac{1}{2} \\ |B| &= 2N \cdot N - N = N(2N - 1) \Rightarrow P(B) = \frac{N(2N - 1)}{2N(2N - 1)} = \frac{1}{2} \\ |C| &= N^2 + N^2 - 2N = 2N(N - 1) \Rightarrow P(C) = \frac{2N(N - 1)}{2N(2N - 1)} = \frac{N - 1}{2N - 1} \end{aligned}$$

Genauso gilt für die gemeinsam aufgetretenen Ereignisse:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{2, 4, \dots, 2N\} \times \{1, 3, \dots, 2N - 1\} \\ A \cap C &= \{2, 4, \dots, 2N\}^2 \setminus \{(2, 2), \dots, (2N, 2N)\} \\ B \cap C &= \{1, 3, \dots, 2N - 1\}^2 \setminus \{(1, 1), \dots, (2N - 1, 2N - 1)\} \end{aligned}$$

Die Anzahl der Elemente berechnet sich entsprechend:

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= N \cdot N = N^2 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{N^2}{2N(2N - 1)} = \frac{N}{2(2N - 1)} \\ |A \cap C| &= N \cdot N - N = N(N - 1) \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{N(N - 1)}{2N(2N - 1)} = \frac{N - 1}{2(2N - 1)} \\ |B \cap C| &= N \cdot N - N = N(N - 1) \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{N(N - 1)}{2N(2N - 1)} = \frac{N - 1}{2(2N - 1)} \end{aligned}$$

Man erkennt jetzt, dass $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$, also A und B nicht unabhängig sind. Jedoch sind A und C unabhängig, genauso wie B und C .

3. Da die Ereignisse nicht paarweise unabhängig sind, sind sie erst recht nicht vollständig unabhängig.

Zur Demonstration gebe ich noch einen alternativen Wahrscheinlichkeitsraum an. Jeder möge für sich entscheiden, welcher Raum der Günstigere ist.

Es bezeichne u das Ziehen einer ungeraden Kugel und g das Ziehen einer geraden Kugel. Nun bestehe ein Experiment wieder darin, beide Kugeln zu ziehen. Jetzt wird aber nicht die Ziffern der Kugel notiert, sondern nur, ob gerade bzw. ungerade Kugeln gezogen wurden. Die zugrundeliegende Menge besteht also nur aus 4 Elementen:

$$\Omega = \{(g, g), (u, g), (g, u), (u, u)\}$$

Vorsicht: (Ω, P) ist jetzt kein Laplaceraum mehr!

Zunächst muss also das Wahrscheinlichkeitsmaß angegeben werden. Dabei stützen wir uns auf die Überlegungen, welche angestellt wurden, die das Urnenmodell OHNE ZURÜCKLEGEN betreffen. Wir können auch folgendermaßen vorgehen:

Offensichtlich ist $P((g, g)) = P((u, u))$ und $P((g, u)) = P((u, g))$.

Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, zweimal hintereinander eine gerade Kugel zu ziehen? Beim ersten Zug gibt es gleich viele gerade wie ungerade Kugeln. Also ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Beim zweiten Zug ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass wieder eine gerade Kugel gezogen wird, während beim ersten Zug schon eine gerade Kugel gezogen wurde $\frac{N-1}{2N-1}$. Es ist also:

$$P((g, g)) = P((u, u)) = \frac{N-1}{2(2N-1)}$$

entsprechend findet man

$$P((u, g)) = P((g, u)) = \frac{N}{2(2N-1)}$$

Die Wahrscheinlichkeiten, welche den Ereignissen $A, B, C, A \cap B, A \cap C$ und $B \cap C$ zugeordnet sind, lassen sich nun einfach angeben:

$$P(A) = P(\{(g, g), (g, u)\}) = P(\{(g, g)\} \cup \{(g, u)\}) = P((g, g)) + P((g, u)) = \frac{N-1+N}{2(2N-1)} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P(\{(g, u), (u, u)\}) = P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = P(\{(g, g), (u, u)\}) = \frac{N-1}{2(2N-1)}$$

$$P(A \cap B) = P(\{(g, u)\}) = \frac{N}{2(2N-1)}$$

$$P(A \cap C) = P(\{(g, g)\}) = \frac{N-1}{2(2N-1)}$$

$$P(A \cap B) = P(\{(u, u)\}) = \frac{N-1}{2(2N-1)}$$

Das sind aber gerade die Wahrscheinlichkeiten, welche vorhin mit der anderen Methode berechnet wurden.

Bemerkung: Bei der alternativen Methode sind wir im Grunde genommen auch von einem Laplace-raum ausgegangen, da die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse **BERECHNET** werden mussten unter der Annahme, dass jeder Zug einer einzelnen Kugel gleichwahrscheinlich ist.