

Mathematik B für die Molekulare Biotechnologie, SS 2003

Übungsblatt 10

Dies ist das letzte Übungsblatt unseres Kurses. Um Sie in der vorletzten Semesterwoche nicht zu überlasten, sind es nur zwei Aufgaben. Der Zettel enthält auch eine freiwillige SCILAB (MATLAB) Aufgabe, aber bitte keine Panik.

Aufgabe 1. (Stabile Fixpunkte, zeitkontinuierlich)

Betrachten Sie das leicht geänderte zeitkontinuierliche Insulin-Zucker System aus der Vorlesung, mit von uns einstellbarer "Insulinreaktionskonstante" $a > 0$.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_2^2 - x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1x_2 + 1\end{aligned}$$

1. Berechnen Sie den (einzigen) Fixpunkt x^* mit positiven Komponenten $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$ als Funktion von a .
2. Linearisieren Sie das System am Fixpunkt und berechnen Sie die Eigenwerte. Zeigen Sie, dass der Fixpunkt asymptotisch stabil ist (dass also die Eigenwerte negativen Realteil haben), ganz egal, welchen Wert $a > 0$ hat.
- *3. Zeigen Sie, dass das System für sehr kleines oder sehr großes a in der Nähe des Fixpunkts nicht mehr oszilliert, indem Sie sich die Eigenwerte ansehen.
- *4. Simulieren Sie das System in SCILAB mit beliebiger Anfangsbedingung dreimal, mit $a = 0.1$, $a = 1$, $a = 10$ (siehe letztes Aufgabenblatt bzw. SCILAB File auf dem Netz als Vorlage zur Arbeitersparnis). Plotten Sie jeweils mit `plot2d(x(1,:), x(2,:))`, und zoomen Sie mit 2D Zoom in die Nähe des Fixpunkts (um sich von dem vorhergesagten Oszillationsverhalten für verschiedene Werte von a zu überzeugen). Geben Sie die Plots mit ab.

(2 + 4 = 6 Punkte, 2 + 2 = 4 Zusatzpunkte)

Aufgabe 2. (Konfidenzintervalle)

Ein Geigerzähler wird benutzt, um die Radioaktivität eines speziellen Kilos Kaffees zu ermitteln, um auf dessen Herkunft zu schliessen. Jede Sekunde gibt der Zähler einen Wert in Bequerel an (typischerweise ca. 1000 Bq), der sich jedoch von Sekunde zu Sekunde aufgrund stochastischer Schwankungen ändert. Wir bilden nun den Mittelwert über n Messungen, um zu einem genaueren Ergebnis zu kommen. Wir wissen, dass jede einzelne Messung als normalverteilte Zufallsvariable mit unbekanntem Mittelwert aber bekannter Standardabweichung $\sigma_0 = 100$ Bq aufgefasst werden kann. Wie oft müssen wir messen, um den Wert auf ± 10 Bq genau angeben zu können, mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 95.5%?

(4 Punkte)