Interdisziplinäres Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Dr. h.c. H. G. Bock
Leonard Wirsching

Heidelberg, 23. April 2008
Im Neuenheimer Feld 368

Algorithmische Optimierung 2

SS 2008

2. Übungsblatt

5. Aufgabe (Ecken sind Extremalpunkte): Zeigen Sie, daß folgende Charakterisierungen eines Punktes v innerhalb eines Polyeders P äquivalent sind:

1. $v \in P$ ist eine Ecke.
2. $v \in P$ ist ein extremaler Punkt, er kann also nicht als Konvexkombination anderer Punkte aus P gebildet werden.

Zur Erinnerung: Ist P ein Polyeder und H eine Stützhyperebene von P, dann nennt man die Schnittmenge $P \cap H$ eine *Ecke*, falls sie die Dimension 0 besitzt. (4 Punkte)

6. Aufgabe (Matrixinverse):

a) Beweisen Sie die Sherman-Morrison Formel:

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}uv^TA^{-1}/\alpha,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ nichtsingulär, $u, v \in \mathbb{R}^m$ und $\alpha = 1 + v^TA^{-1}u \neq 0$. (2 Punkte)

b) Sei M die $(m + n) \times (m + n)$-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} B & N \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}$$

wobei die $m \times m$-Matrix B regulär ist. Zeigen Sie, dass M^{-1} die Form

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}N \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}$$

hat. (2 Punkte)

(Bemerkung: Matrizen dieser Form treten im Simplex-Verfahren zur Lösung linearer Optimierungsprobleme auf!)

7. Aufgabe (Problemtransformationen): Transformieren Sie folgende Probleme in Lineare Programme:

a)

$$\min_x \left(\max_i \sum_j a_{ij}\, x_j \right)$$
$$\text{s. t.} \quad D\,x \leq e$$

(2 Punkte)

b) Eine Herausforderung zum Knobeln . . .

$$\min_x \frac{\sum_j a_j\, x_j}{\sum_j b_j\, x_j}$$
$$\text{s. t.} \quad D\,x \leq e$$

Unter welchen Bedingungen gilt diese Umformung? (4 Punkte)

8. Aufgabe (Soft Constraints): Eine Nebenbedingung des Typs $\sum_j a_j x_j \leq b$ erlaubt keine Lösung, die diese Nebenbedingung verletzt. Dies ist oft unrealistisch, z.B. wenn die Nebenbedingung einen Rohstoff beschränkt, man aber im Prinzip für einen (hohen) Preis weitere Rohstoffe einkaufen könnte. Man kann diese Beschränkung dann "aufweichen" (daher *soft constraint*).

a) Überlegen Sie sich, wie ein LP mit solch einer Nebenbedingung umformuliert werden kann, so daß zu einem (hohen) Preis die Bedingung um bis zu $\Delta b > 0$ verletzt werden kann. (2 Punkte)

b) Wie kann man eine Gleichung $\sum_j a_j x_j = b$ auf entsprechende Weise "aufweichen" (wobei ebenfalls eine Verletzung bis zu einer Größe Δb erlaubt ist)? Was muss in der Lösung gelten? (2 Punkte)

9. Aufgabe (Redundanzen): Betrachten Sie folgendes Lineares Programm:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max_x & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & \\
\text{s. t.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & & & + & x_4 & \leq & 3 \\
 & & & & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
\end{array}$$

Wieviele Variablen und Beschränkungen können Sie (mit Begründung!) vom Problem eliminieren? (4 Punkte)

Bemerkung: Mittels solcher Voranalysen können oftmals große Probleme deutlich kleiner gemacht werden, bevor sie mit dem tatsächlichen Lösungsalgorithmus bearbeitet werden. Außerdem können Unzulässigkeiten in den Beschränkungen vorzeitig aufgedeckt werden.

Praktische Aufgabe 1 (Das Programm `lpsolve`): In dieser Aufgabe sollen Sie sich mit dem Open Source LP Solver `lpsolve` vertraut machen, den Sie sich unter

`http://sourceforge.net/project/showfiles.php?group_id=145213`

herunterladen können. Eine Beschreibung der Installation und Verwendung unter Windows und Linux können Sie von der Übungshomepage herunterladen. Eine umfangreiche Dokumentation ist zudem für beide Plattformen vorhanden.

a) Laden Sie sich von der Übungshomepage die beiden MPS-Files `lp01.mps` und `lp02.mps` herunter. Machen Sie sich in der Dokumentation mit dem MPS Dateiformat vertraut. Schreiben Sie dann die Probleme in mathematischer Schreibweise auf und lösen Sie die Probleme mit `lpsolve`. Schreiben Sie auch die Lösungen und die Zielfunktionswerte auf. (4+4=8 Punkte)

b) Formulieren Sie folgende Probleme im MPS Format und lösen Sie mit `lpsolve`:

- Ein Haus mit 1000 qm Bodenfläche soll möglichst preisgünstig mit Bodenbelag ausgestattet werden, dessen Reinigungskosten jährlich 7000 GE nicht übersteigen dürfen. Dabei sind mindestens 300 qm mit Parkett C (Preis: 60 GE/qm; jährl. Reinigungskosten: 4 GE/qm) auszustatten, während für den Rest die zwei Kunststoffsorten A (Preis: 30 GE/qm; jährl. Reinigungskosten: 9 GE/qm) und B (Preis: 40 GE/qm; jährl. Reinigungskosten: 8 GE/qm) zur Verfügung stehen. Wie viele qm sind von jedem Belag zu wählen?
- In einem Betrieb werden Schafe und Kühe gehalten. Es sind Ställe für höchstens 40 Kühe und 90 Schafe vorhanden. Eine Kuh braucht mindestens 1 ha, ein Schaf mindestens 0.25 ha Weideland, wovon 50 ha vorhanden sind. Pro Jahr stehen außerdem 1650 Mannarbeitsstunden zur Versogung zur Verfügung, wobei für jede Kuh 30 und für jedes Schaf 10 Mannarbeitsstunden jährlich benötigt werden. Wie viele Kühe und Schafe sollte der Betrieb halten, wenn der Reingewinn 200 GE pro Kuh und 40 GE pro Schaf beträgt? (Ganzzahlige Formulierung!)

Schreiben Sie die Lösungen und optimalen Zielfunktionswerte auf und senden Sie die MPS-Files an Ihre Übungsgruppenleiter. (4+4=8 Punkte)

Abgabetermin: 08. Mai 2008 (da der 01. Mai ein Feiertag ist, Sie haben daher zwei Wochen Zeit für das Übungsblatt), 11:15 Uhr (vor der Vorlesung)