INTERDISZIPLINÄRES ZENTRUM FÜR WISSENSCHAFTLICHES RECHNEN DER UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Heidelberg, 15. Mai 2008
Im Neuenheimer Feld 368

Prof. Dr. Dr. h.c. H. G. Bock
Leonard Wirsching

Algorithmische Optimierung 2

SS 2008

4. Übungsblatt

13. Aufgabe (Degeneriertheit und Cycling): Lösen Sie mit der Simplex-Methode

- mit Bland-Regel
- mit Perturbationsmodifikation (verwenden Sie $b(\varepsilon) = b + \varepsilon$, $\varepsilon = (0.1, 0.01, 0.001)^T$)

das lineare Problem (Cycling-Beispiel von MARSCHALL und SUURBALLE)

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_x & -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 \\
\text{s.t.} & \frac{1}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 \\
& \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 + x_6 = 0 \\
& x_1 + x_7 = 1 \\
& x \geq 0 \text{ komponentenweise.}
\end{array}
$$

(4 + 4 = 8 Punkte)

14. Aufgabe (Perturbationsmethode): Betrachte das lineare System $Ax = b$ mit $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$ und definiere das gestörte System $Ax = b(\varepsilon)$, wobei

$$b(\varepsilon) = b + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + ... + \varepsilon^n a_n.$$

Zeigen Sie: Gibt es eine zulässige (möglicherweise degenerierte) Basislösung für das ungestörte System mit der Basis $B = [a_1, a_2, ..., a_m]$, dann gibt es zur selben Basis eine nichtdegenerierte zulässige Basislösung für das gestörte System für eine Menge $\{\varepsilon | 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \varepsilon_0 > 0\}$.

(4 Punkte)

15. Aufgabe (Zwei-Phasen-Methode): Lösen Sie das folgende LP mit der Zwei-Phasen-Methode:

$$
\begin{array}{ll}
\max\limits_x & x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{unter} & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\
& 2x_2 + 3x_3 = 5 \\
& x_1 - 2x_2 \geq 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

(4 Punkte)

16. Aufgabe (Phase I Alternative): Um eine zulässige Startbasis für das LP

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x} & c^T x \\ \text{unter} & Ax \leq b, x \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

zu erhalten (b ist nicht notwendig ≥ 0), betrachten wir alternativ zur Vorlesung das LP

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x,z} & z \\ \text{unter} & Ax - bz \leq 0, z \leq 1, x \geq 0, z \geq 0 \ (z \in \mathbb{R}) \end{array} \tag{2}$$

Das Problem (2) wird mit dem Simplexalgorithmus gelöst. Wie kann man aus einer optimalen Basis von (2) eine zulässige Basis für (1) gewinnen oder entscheiden, dass (2) unzulässig ist? Geben Sie ein Verfahren an, begründen Sie Ihr Vorgehen und wenden Sie auf das folgende LP an:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ \text{unter} & 2x_1 - x_2 \leq -1 \\ & x_1 + 2x_2 \leq -6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(4 + 4 = 8 Punkte)

17. Aufgabe (Matrixzerlegung): Führen Sie eine ein LU-Zerlegung mit kanonischer Pivotisierung für die folgenden Matrizen durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie dabei die Zwischenergebnisse für L und U an. Was stellen Sie fest ?

(4 + 4 = 8 Punkte)

Abgabetermin: 29. Mai 2008 (wegen Feiertag!), 11:15 Uhr (vor der Vorlesung)