INTERDISZIPLINÄRES ZENTRUM FÜR WISSENSCHAFTLICHES RECHNEN DER UNIVERSITÄT HEIDELBERG
Prof. Dr. Dr. h.c. H. G. Bock
Leonard Wirsching

Heidelberg, 11. Juni 2008
Im Neuenheimer Feld 368

Algorithmische Optimierung 2

SS 2008

7. Übungsblatt

25. Aufgabe (Implizite Homotopiepfade): Sei (x, y, z) ein Punkt mit $(x, z) > 0$. Die Trajektorie $\mathcal{H} : [0, 1] \ni \tau \mapsto (\hat{x}(\tau), \hat{y}(\tau), \hat{z}(\tau))$ ist implizit definiert durch die Lösungen des nichtlinearen Systems

$$\begin{pmatrix} A^T\hat{y} + \hat{z} - c \\ A\hat{x} - b \\ \hat{X}\hat{Z}e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\tau)(A^T y + z - c) \\ (1-\tau)(Ax - b) \\ (1-\tau)XZe \end{pmatrix}, \quad (\hat{x}, \hat{z}) \geq 0.$$

Man sieht einfach, dass $(\hat{x}(0), \hat{y}(0), \hat{z}(0)) = (x, y, z)$ und dass der Grenzwert für $\tau \uparrow 1$ eine primal-duale Lösung ist, falls er existiert. Berechnen Sie die ersten und zweiten Ableitungen von $\mathcal{H}$ bzgl. τ bei $\tau = 0$ und schreiben Sie damit eine Taylorreihenapproximation von $\mathcal{H}$ in der Nähe von $\tau = 0$ auf. (6 Punkte)

26. Aufgabe ($\mathcal{N}_2$ und $\mathcal{N}_{-\infty}$): Zur Erinnerung: $\mathcal{N}_2(\theta) := \left\{(x, y, z) \in \mathcal{F}^0 \mid \|XZe - \mu e\|_2 \leq \theta\mu\right\}$.

a) Bestimmen Sie für $(x, y, z) \in \mathcal{F}^0$ beliebig den Wertebereich von γ, so dass $(x, y, z) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$ (der Wertebereich hängt von x und z ab). (3 Punkte)

b) Finden Sie für $n = 2$ einen Punkt $(x, z) > 0$, so dass die Bedingung $\|XZe - \mu e\|_2 \leq \theta\mu$ für *alle* $\theta \in [0, 1)$ verletzt ist. (3 Punkte)

Praktische Aufgabe 4 (Mehrotra-Algorithmus):
Ziel dieses Projektes, **für das Sie bis zum 3. Juli Zeit haben**, ist die Implementation einer Inneren-Punkt-Methode zum Lösen von LPs. Implementiert werden soll der folgende Algorithmus von Mehrotra:

Input: Startwert (x^0, y^0, z^0), Abbruchtoleranz $\epsilon \approx 10^{-8}$
Output: Approximation der primal-dualen Lösung (x^*, y^*, z^*)
FOR $k = 0, 1, \ldots$

1. Setze $(x, y, z) = (x^k, y^k, z^k)$, $r_c = A^T y + z - c$, $r_b = Ax - b$ und löse

$$\begin{pmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ Z & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^{\text{aff}} \\ \Delta y^{\text{aff}} \\ \Delta z^{\text{aff}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_c \\ -r_b \\ -XZe \end{pmatrix}$$

2. Berechne

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{aff}}^{\text{pri}} &= \min\left\{1, \min_{i:\Delta x_i^{\text{aff}} < 0} -\frac{x_i}{\Delta x_i^{\text{aff}}}\right\}, \\ \alpha_{\text{aff}}^{\text{dual}} &= \min\left\{1, \min_{i:\Delta z_i^{\text{aff}} < 0} -\frac{z_i}{\Delta z_i^{\text{aff}}}\right\}, \\ \mu_{\text{aff}} &= (x + \alpha_{\text{aff}}^{\text{pri}}\Delta x^{\text{aff}})^T(z + \alpha_{\text{aff}}^{\text{dual}}\Delta z^{\text{aff}})/n \end{aligned}$$

3. Setze den Centering-Parameter auf $\sigma = (\mu_{\text{aff}}/\mu)^3$

4. Löse

$$\begin{pmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ Z & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_c \\ -r_b \\ -XZe - \Delta X^{\text{aff}}\Delta Z^{\text{aff}}e + \sigma\mu e \end{pmatrix}$$

5. Berechne

$$\begin{aligned}
\alpha_{k,\max}^{\text{pri}} &= \min_{i:\Delta x_i<0} -\frac{x_i}{\Delta x_i}, \\
\alpha_{k,\max}^{\text{dual}} &= \min_{i:\Delta z_i<0} -\frac{z_i}{\Delta z_i}, \\
\alpha_k^{\text{pri}} &= \min\left\{1, 0.99\,\alpha_{k,\max}^{\text{pri}}\right\}, \\
\alpha_k^{\text{dual}} &= \min\left\{1, 0.99\,\alpha_{k,\max}^{\text{dual}}\right\}
\end{aligned}$$

6. Setze

$$x^{k+1} = x + \alpha_k^{\text{pri}} \Delta x, \quad (y^{k+1}, z^{k+1}) = (y, z) + \alpha_k^{\text{dual}}(\Delta y, \Delta z)$$

7. **IF** Abbruchkriterium erfüllt **THEN** $x^* = x_{k+1}$, $y^* = y_{k+1}$, $z^* = z_{k+1}$ und **STOP**

END FOR

Als *Abbruchkriterium* verwenden Sie

$$\begin{aligned}
\frac{\|Ax - b\|}{1 + \|b\|} &\leq \epsilon, \\
\frac{\|A^T y + z - c\|}{1 + \|c\|} &\leq \epsilon, \\
\frac{|c^T x - b^T y|}{1 + |c^T x|} &\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Für die *Bestimmung des Startwertes* (x^0, y^0, z^0) verwenden Sie den folgenden Algorithmus:

Input: Problemdaten A, b, c
Output: Startwert (x^0, y^0, z^0)

1. Setze $\tilde{x} = A^T(AA^T)^{-1}b$, $\tilde{y} = (AA^T)^{-1}Ac$ und $\tilde{z} = c - A^T\tilde{y}$.
2. Definiere
$$\delta_x = \max\left\{-(3/2)\min_i \tilde{x}_i, 0\right\}, \quad \delta_z = \max\left\{-(3/2)\min_i \tilde{z}_i, 0\right\}.$$
Setze $\hat{x} = \tilde{x} + \delta_x e$ und $\hat{z} = \tilde{z} + \delta_z e$.
3. Definiere
$$\hat{\delta}_x = \frac{1}{2}\frac{\hat{x}^T\hat{z}}{e^T\hat{z}}, \quad \hat{\delta}_z = \frac{1}{2}\frac{\hat{x}^T\hat{z}}{e^T\hat{x}}.$$
4. Setze $x^0 = \hat{x} + \hat{\delta}_x e$, $y^0 = \tilde{y}$ und $z^0 = \hat{z} + \hat{\delta}_z e$.

- Verwenden Sie ausgiebig `LAPACK` und `BLAS` Routinen.
- Achten Sie auf eine grundlegend effiziente Implementierung (z.B. bei zwei LGS mit der selben Koeffizientenmatrix die Zerlegung wiederverwenden).
- Machen Sie effiziente Lineare Algebra durch Strukturausnutzung der Koeffizientenmatrix im Hauptalgorithmus (siehe auch Aufgabe 22, Stichwort Reduktion durch Elimination).
- Denken Sie daran, dass X und Z Diagonalmatrizen sind.

(32 Punkte)

Abgabetermin: 19. Juni 2008 (Theorieteil), 11:15 Uhr (vor der Vorlesung)