Interdisziplinäres Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Dr. h.c. H. G. Bock
Leonard Wirsching

Heidelberg, 18. Juni 2008
Im Neuenheimer Feld 368

Algorithmische Optimierung 2

SS 2008

8. Übungsblatt

27. Aufgabe (Ganzzahlige Lösungen): Eine Matrix A heißt *total unimodular*, wenn die Determinante jeder quadratischen Untermatrix von A einen Wert aus $\{-1, 0, 1\}$ hat. Sei b ein ganzzahliger Vektor und A eine total unimodulare Matrix. Beweisen Sie: Der Polyeder $\{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ hat nur ganzzahlige Ecken, d.h. alle Komponenten der Ecken sind ganzzahlig.

(4 Punkte)

Anmerkung: Die genannte Bedingung ist natürlich wegen der Determinanten in der Praxis sehr unhandlich. Eine hinreichende Bedingung für Unimodularität stammt von A.J. Hofmann: Ist A eine $m \times n$ Matrix, deren Zeilen in zwei disjunkte Mengen B und C zerfallen, so daß

- jede Spalte von A höchstens zwei von Null verschiedene Einträge besitzt,
- jeder Eintrag von A aus $\{0, 1, -1\}$ ist,
- für zwei von Null verschiedene Einträge mit dem gleichen Vorzeichen in einer Spalte die eine Zeile in B ist und die andere Zeile in C ist,
- für zwei von Null verschiedene Einträge mit unterschiedlichem Vorzeichen in einer Spalte beide Zeilen entweder in B oder in C sind,

dann ist A total unimodular.

28. Aufgabe (Modellierung): Betrachtet wird ein Produktionsplanungssystem mit N Produkten. Für die Produktion eines Produktes p fallen einmalige Rüstkosten K_p und Proportionalkosten C_p pro produzierter Einheit an. Zur Herstellung von Produkt p werden A_{rp} Einheiten eines Rohstoffes r benötigt; insgesamt stehen M verschiedene Rohstoffe in beschränkter Menge B_r zur Verfügung. Erwartet wird, dass maximal D_p Einheiten von Produkt p zu einem Erlös von E_p Euro pro Einheit nachgefragt werden. Formulieren Sie ein MIP zur Maximierung des Gewinns.

(4 Punkte)

29. Aufgabe (Branch & Bound): Lösen Sie mit einem Branch & Bound Verfahren das ganzzahlige Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rl}
\max & 77x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 33x_5 + 13x_6 + 110x_7 + 21x_8 + 47x_9 \\
\text{s. t.} & 774x_1 + 76x_2 + 22x_3 + 42x_4 + 21x_5 + 760x_6 + 818x_7 + 62x_8 + 785x_9 \leq 1500 \\
& 67x_1 + 27x_2 + 794x_3 + 53x_4 + 234x_5 + 32x_6 + 797x_7 + 97x_8 + 435x_9 \leq 1500 \\
& x_1, \ldots, x_9 \geq 0
\end{array}$$

Lösen Sie die linearen Relaxierungen mit `lpsolve`. Schreiben Sie den Ablauf auf wie im Rechenbeispiel aus der Vorlesung, bzw. wie im Skript Seite 68f.

(4 Punkte Theorieaufgaben + 8 Punkte Praktische Aufgaben)

Abgabetermin: 26. Juni 2008, 11:15 Uhr (vor der Vorlesung)