Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. W. Jäger
Julian Scheuer

Sommersemester 2012
25.05.2012
Blatt 6

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis

Aufgabe 6.1 (4 Punkte)
Seien E und F normierte Räume und $A \in \mathcal{L}(E,F)$. Dann besitzt die Operatornorm von A die Darstellungen

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \inf\{c > 0 \colon \|Ax\| \leq c\|x\| \; \forall x \in E\}.$$

Aufgabe 6.2 (2+2 Punkte)
Seien E_i, $1 \leq i \leq n$ und F normierte Räume. Bezeichne mit $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ den Raum der stetigen multilinearen Abbildungen von $\prod_{i=1}^n E_i$ nach F. Beweisen Sie
(1) Mit

$$\|A\| = \sup\{\|A(x_1, ..., x_n)\| \colon \|x_1\| = ... = \|x_n\| = 1\}$$

ist $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ ein normierter Raum und
(2) Falls F ein Banachraum ist, ist $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ auch ein Banachraum.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)
Seien E, F, G normierte Räume. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi \colon \mathcal{L}(E, F; G) &\to \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G))\\ a &\mapsto (x \mapsto a(x, \cdot))\end{aligned}$$

wohldefiniert und ein normtreuer Vektorraumisomorphismus ist.

Aufgabe 6.4 (4 Punkte)
Sei X ein normierter Raum und X'' sein Bidualraum. Durch die Zuordnung

$$\mathcal{I} \colon x \mapsto (\phi \mapsto \phi(x))$$

wird eine Abbildung

$$\mathcal{I} \colon X \to X''$$

definiert. Beweisen Sie, dass

$$\mathcal{I} \in \mathcal{L}(X, X'')$$

und

$$\|\mathcal{I}(x)\|_{X''} = \|x\|_X$$

gilt.

Abgabe: Freitag, 01.06.2012, 17 Uhr.